Baccalauréat série S Nouvelle – Calédonie décembre 2000

Exercice 1 **5 points**

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

A(4 , 0, 0), B(2, 4, 0), C(0, 6, 0), S(0, 0, 4), E(6, 0, 0) et F(0, 8, 0)

1. Réaliser une figure comportant les points définis dans l'exercice que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que E est le point d'intersection des droites (BC) et (OA).
3. On admettra que F est le point d'intersection des droites (AB) et (OC).
   a. Déterminer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{SE} \wedge \overrightarrow{EF}$. En déduire l'équation cartésienne du plan (SEF).
   b. Calculer les coordonnées du point A′ barycentre des points pondérés (A, 1) et (S,3).
   c. On considère le plan P parallèle au plan (SEF) et passant par A′. Vérifier qu'une équation cartésienne de P est $4x+3y+6z-22=0$.
4. Le plan P coupe les arêtes [SO], [SA], [SB] et [SC] de la pyramide SOABC respectivement aux points O′, A′, B′ et C′.
   a. Déterminer les coordonnées de O′.
   b. Vérifier que C′ apour coordonnées $\left(0,\ 2,\ \dfrac{8}{3}\right)$.
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (SB), en déduire les coordonnées du point B′.
5. Vérifier que O′A′B′C′ est un parallélogramme.

Exercice 2 **5 points**

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2-2z+2=0.$$

   Préciser le module et un argument de chacune des solutions.

   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(-\mathrm{i}z+3\mathrm{i}+3)^2-2(-\mathrm{i}z+3\mathrm{i}+3)+2=0.$$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$d'unité graphique 2cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1+\mathrm{i},\ z_B=\overline{z_A},\ z_C=2z_B$.
   a. Déterminer les formes algébriques de z_B et z_C.
   b. Placer lespoints A, B et C.
   c. Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle $(\mathscr{C})$ de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$.
   d. Calculer $\dfrac{z_C-3}{z_A-3}$; en déduire la nature du triangle IAC.

e. Le point E est l'image du point O par la translation de vecteur $2\overrightarrow{IC}$. Déterminer l'affixe du point E.

f. Le point D est l'image du point E par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Déterminer l'affixe du point D.

g. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 2 **spécialité**

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.
S est l'ensemble des couples (x, y) tels que $\text{PGCD}(x,\ y) = y - x$.

1. **a.** Calculer le $\text{PGCD}(363,\ 484)$.

b. Le couple (363, 484) appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n,\ n+1)$ appartient-il à S ?
Justifier votre réponse.

3. **a.** Montrer que $(x,\ y)$ appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y - x)$ et $y = (k+1)(y - x)$.

b. En déduire que pour tout couple $(x,\ y)$ de S on a :
$\text{PPCM}\ (x,\ y) = k(k+1)(y - x)$.

4. **a.** Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b. En déduire l'ensemble des couples $(x,\ y)$ de S tels que $\text{PPCM}\ (x,\ y) = 228$.

Problème **10 points**

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

et on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. **a.** Déterminer la limite de u en $-\infty$.

b. Montrer que, pour tout x réel, on a $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
En déduire la limite de u en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que $[u(x) + 2x]$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

b. Montrer que pour tout x réel, on a $u(x) > 0$. En déduire le signe de $[u(x) + 2x]$.

c. Interpréter graphiquement ces résultats.

3. **a.** Montrer que la dérivée de la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u'(x) = \frac{-\ u(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

b. Étudier les variations de la fonction u.

4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et son asymptote oblique.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x \frac{-1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t.$$

et (Γ) sa courbe représentative.

1. Justifier que pour tout x réel on a $f(x) = \ln u(x)$ en utilisant la question **A.3.a.**
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$, puis en $+\infty$ et étudier les variations de f.
3. **a.** Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe (Γ) au point d'abscisse 0.

   b. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) + x$. Montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi(0) = 0$. En déduire la position de ta courbe (Γ) par rapport à la tangente (T).
4. Tracer sur le même graphique la courbe (Γ) et la tangente (T).

Partie C

1. On pose $\alpha = \dfrac{1-\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}}$, montrer que $u(\alpha) = \mathrm{e}$ et en déduire $f(\alpha)$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_\alpha^0 \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\,\mathrm{d}x$.
3. Soit V une primitive de u et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$.

   a. Montrer que $u\left(\dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\right) = \mathrm{e}^{-t}$.

   b. Justifier que $V \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est définie par

   $$\left(V \circ g\right)'(t) = \frac{1+\mathrm{e}^{-2t}}{2}.$$

   c. En déduire que $V(0) - V(\alpha) = (V \circ g)(0) - (V \circ g)(-1) = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1+\mathrm{e}^{-2t}}{2}\mathrm{d}t$,

   puis que $\displaystyle\int_\alpha^0 u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.
4. On admet que pour tout x réel, $f(x) < u(x)$.

   Déduire des questions précédentes l'aire, en unité d'aires, du domaine limité par les courbes $(\mathscr{C})$, (Γ) et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$.