MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2024

ACADÉMIE DE NICE
Liberté
Égalité
Fraternité

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures) :

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques («Spé Maths»), et uniquement ceux-là, doivent traiter **les exercices académiques 1 et 2**.
- **Tous les autres candidats**, c'est-à-dire ceux de la voie générale **N**'ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD, etc.), doivent traiter **les exercices académiques 1 et 3**.

Chaque équipe, qui ne rend qu'une seule copie, traite ainsi deux exercices académiques selon sa catégorie, l'exercice 1 et l'exercice 2, ou bien l'exercice 1 et l'exercice 3.

Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

L'énoncé académique comporte 18 pages.

Exercice 1 (tous les candidats)

L'île aux pixels

Cet exercice comprend une page annexe à rendre avec votre copie.

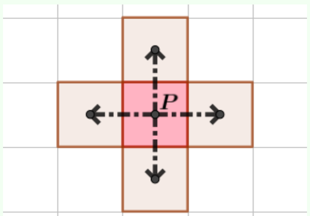
Dans un jeu vidéo, vous explorez un océan virtuel ; vous naviguez sur un bateau à la recherche d'îles à explorer. Votre mission est, à l'aide d'un robot que vous déposez sur l'île, de délimiter son contour en le codant par une suite de chiffres.

Définition des pixels :
Cet océan virtuel est un quadrillage régulier formé de carrés de même taille.

- Les carrés du quadrillage sont appelés des **pixels**.
- Un pixel peut être **coloré** (associé à la terre) ou **blanc** (associé à la mer).
- On dit que deux pixels sont **voisins** s'ils ont un côté ou un sommet en commun.

Définition des déplacements :

- Un déplacement correspond au passage du robot d'un pixel à un autre pixel ayant un côté en commun. On représente un déplacement par une **flèche** reliant les centres de chacun des pixels.
- À partir d'un pixel donné P, seuls quatre déplacements sont possibles comme indiqué sur la figure ci-dessous.

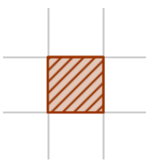


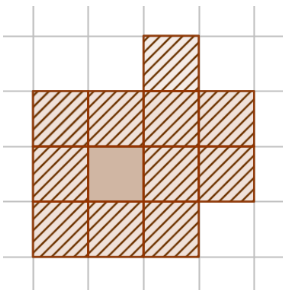
Les 4 déplacements à partir du pixel P

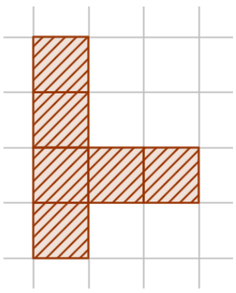
Définition d'une île :

- Une île est un ensemble de pixels **colorés**. Une île peut être réduite à un seul pixel.
- Le **contour** de l'île est l'ensemble des pixels de l'île qui sont voisins d'un pixel blanc.

Voici trois exemples d'îles dont le contour a été hachuré :







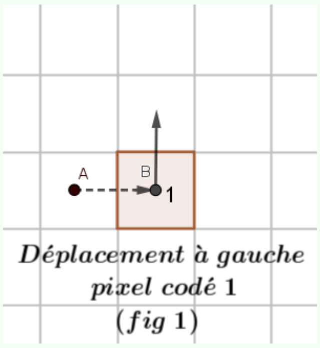
Partie A - Un codage binaire

Vous disposez d'un robot de conception très simple : les déplacements successifs du robot sont codés par une suite de 0 et de 1. De plus, il est capable de se déplacer sur terre comme sur mer, c'est-à-dire sur un pixel coloré ou sur un pixel blanc.

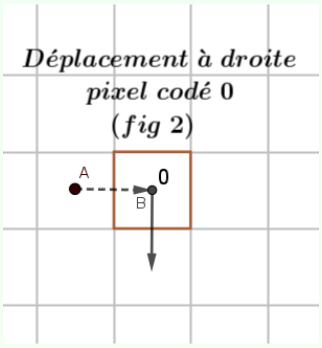
Définition du premier pixel coloré :
On appelle D le premier pixel coloré du contour de l'île sur lequel le robot est déposé.
Une flèche partant du bateau vers le pixel D indique le déplacement initial du robot.

Définition du code :
Le robot se déplace d'un pixel A vers un pixel B (direction $A \to B$).

Si le pixel B est **coloré**, on le code par un 1 et le robot tourne **à gauche** en faisant un angle droit par rapport à la direction $A \to B$ (voir fig 1).

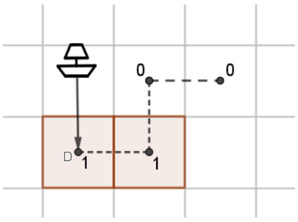


Si le pixel B est **blanc**, on le code par un 0 et le robot tourne **à droite** en faisant un angle droit par rapport à la direction $A \to B$ (voir fig 2).



Ainsi le contour de l'île est représenté par un code constitué d'une suite de 0 ou de 1.
On admet que le robot retourne sur le bateau et alors le robot s'arrête.

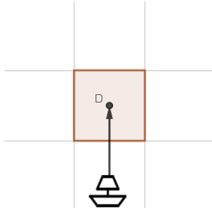
Par exemple, si le code débute par 1 1 0 0 ,
le contour partiel de l'île est :



1. Sur l'**annexe A1** (**à rendre avec votre copie**), on a représenté les déplacements le long du contour de l'île n° 1 formée de deux pixels.
   Le code du contour de l'île est : 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 .
   Écrire le code du contour pour les îles n° 2 et n° 3.
   Pour n° 2, 1 1000 1 1000 10 1000
   Pour n° 3, 1000 1 100 1000 1 100
2. Sur l'**annexe A2** (**à rendre avec votre copie**), en coloriant les pixels du contour, dessiner le contour
   a) de l'île n° 4 dont le code du contour est 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 ,
   b) de l'île n° 5 dont le code du contour est 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0.

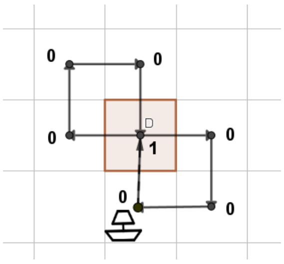
   cf annexe

3. a) Le code du contour d'une île est 1 0 0 0 1 0 0 0.
Recopier la figure ci-contre et indiquer les déplacements du robot.



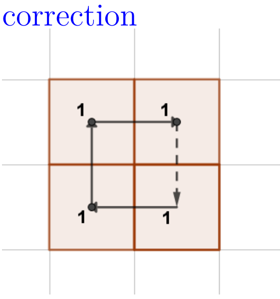
b) Quelle est alors la forme de l'île ?
L'île **semble** réduite à un seul pixel.

correction



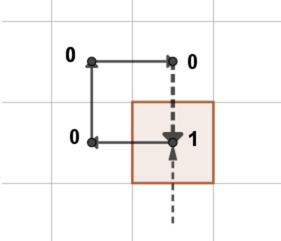
Partie B - Quelques propriétés du code

1. Quel est le premier chiffre d'un code ? Quel est le dernier chiffre d'un code ?
Le robot se déplace du bateau vers un pixel gris donc le premier chiffre est 1.
Le robot arrive au bateau donc le dernier chiffre est 0.
2. Supposons que le robot produise un code contenant la suite 1 1 1 1.
   a) Réaliser une figure correspondant à cet extrait de code.
   correction



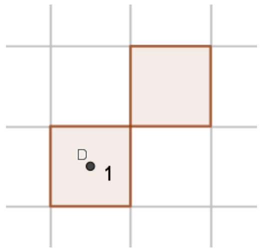
   b) En déduire que la suite 1 1 1 1 ne peut pas apparaître dans le code.
   Comme le robot doit repasser sur le pixel blanc du départ, cela est alors impossible.

3. Réaliser une figure correspondant à l'extrait de code 1 0 0 0.
Quel effet a cet extrait de code pour la direction du robot ?
La direction après ce code est à l'opposé de celle d'origine.



Partie C - Une forme d'île problématique

On considère l'île ci-contre.
Le robot est déposé par le bateau sur le pixel de départ D.



1. Sur l'**annexe C1** (**à rendre avec votre copie**), compléter le parcours du robot pour chaque situation donnée.
   Annexe
   code 1 : 1 0 0 0 1 0 0 0
   code 2 : 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0
   code 3 : 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0
   code 4 : 1 0 0 0 1 0 0 0

2. Le robot peut-il toujours parcourir tout le contour de l'île ?
   Non il y a deux directions pour lesquelles quand on dépose le robot, celui-ci ne parcourt pas les deux pixels du contour.

Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant la «spé maths»)

Les nombres ploutons

Cet exercice comprend une page annexe à rendre avec votre copie.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux entiers naturels non nuls qui possèdent « beaucoup » de diviseurs. On les appelle **nombres ploutons**.

La définition exacte de tels nombres est la suivante :

Un **nombre plouton** est un entier naturel supérieur ou égal à 2 qui possède strictement plus de diviseurs positifs que **tous** les entiers naturels non nuls qui lui sont strictement inférieurs.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $\boldsymbol{d(n)}$ le nombre de diviseurs positifs du nombre n. On rappelle qu'un entier naturel non nul p est **premier** si, et seulement si, $d(p) = 2$.

Par exemple :

- 3 n'est pas un nombre plouton car $d(3) = d(2) = 2$, 3 n'a donc pas strictement plus de diviseurs positifs que 2 qui est entier naturel et qui lui est strictement inférieur.
- 4 est un nombre plouton. En effet 4 admet trois diviseurs positifs 1, 2 et 4, donc $d(4) = 3$. De plus $d(1) = 1$, $d(2) = d(3) = 2$. Ainsi 4 a strictement plus de diviseurs positifs que les nombres 1, 2 et 3 qui sont les entiers naturels non nuls qui lui sont strictement inférieurs.

Partie A - Les tout-petits ploutons

1. Compléter le tableau de l'**annexe 1** (**à rendre avec votre copie**) et donner les quatre premiers nombres ploutons classés dans l'ordre croissant.

n	1	**2**	3	**4**	5	**6**	7	8	9	10	11	**12**
$d(n)$	1	**2**	2	**3**	2	**4**	2	4	3	4	2	**6**

   Les quatre premiers nombres ploutons classés dans l'ordre croissant sont 2, 4, 6 et 12.

2. Montrer qu'il n'existe pas de nombre premier autre que 2 qui soit un nombre plouton.
   On considère un nombre premier p avec $p > 2$.
   $d(p) = d(2) = 2$.
   Le nombre de diviseurs de p est égal au nombre de diviseurs de 2 (il n'est donc pas strictement supérieur) donc p n'est pas un nombre plouton.

3. Quel est le plus petit nombre plouton strictement supérieur à 12 ?
   La réponse est 24. En effet, $d(12) = 6$; $d(13) = 2$; $d(14) = 4$; $d(15) = 4$; $d(16) = 5$; $d(17) = 2$; $d(18) = 6$; $d(19) = 2$; $d(20) = 6$; $d(21) = 4$; $d(22) = 4$; $d(23) = 2$; $d(24) = 8$.

4. L'objectif de cette question est de déterminer s'il existe ou non une infinité de nombres ploutons.
   a) Soit k un entier naturel. Justifier que $d(2^k) = k + 1$.
   Les diviseurs positifs de 2^k sont 1, 2, 2^2, ..., 2^k d'où $d(2^k) = k + 1$.
   b) Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres ploutons. Dans ce cas, on note N le plus grand nombre plouton et on note $k = d(N)$. Mettre en évidence une contradiction.
   D'après la question précédente, le nombre 2^k admet $d(2^k) = k+1$ diviseurs positifs et admet donc plus de diviseurs que N. Or si N est le plus grand nombre plouton, aucun nombre ne peut avoir plus de diviseurs que lui. Ainsi il y a contradiction.

c) Existe-t-il une infinité de nombres ploutons ?
D'après la question précédente, le nombre de nombres plouton n'est pas fini. Il existe donc une infinité de nombres ploutons.

Partie B - Les ploutons inférieurs ou égaux à 200

Dans cette partie, on souhaite obtenir la liste de tous les nombres ploutons inférieurs ou égaux à 200. On admet la propriété suivante :

Si n est un nombre plouton inférieur ou égal à 200 alors il existe des entiers naturels a, b et c tels que $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$.

Pour un entier naturel n non nul, une telle écriture $2^a \times 3^b \times 5^c$, quand elle existe, est unique et est appelée **décomposition** de n.

Par exemple, $2^2 \times 3^0 \times 5^1$ est la décomposition du nombre 20.

1. Donner les décompositions des quatre premiers nombres ploutons.

$$2 = 2^1 \times 3^0 \times 5^0$$
$$4 = 2^2 \times 3^0 \times 5^0$$
$$6 = 2^1 \times 3^1 \times 5^0$$
$$12 = 2^2 \times 3^1 \times 5^0$$

2. Est-il vrai que si $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$ avec a, b et c entiers naturels tels que $n \leqslant 200$ alors n est nécessairement un nombre plouton ? Justifier la réponse.
On considère $n = 3 = 2^0 \times 3^1 \times 5^0$ qui est un entier naturel inférieur à 200 et qui n'est pas un nombre plouton d'après la question 1 de la partie A. Ainsi si $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$ avec a, b et c entiers naturels tels que $n \leqslant 200$ alors il n'est pas vrai que n soit nécessairement un nombre plouton.

Soit n un nombre inférieur ou égal à 200 admettant comme décomposition $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$ où a, b et c sont des entiers naturels.
d est un **diviseur positif** de n si et seulement s'il existe des entiers naturels α, β et γ tels que $\alpha \leqslant a$, $\beta \leqslant b$, $\gamma \leqslant c$ et $d = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$.
Si d est un diviseur positif de n alors l'écriture $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ est aussi appelée **décomposition** de d.

Par exemple, en prenant $n = 40$, sa décomposition est $n = 2^3 \times 3^0 \times 5^1$.
Le nombre $d = 2^2 \times 3^0 \times 5^1 = 20$ est un diviseur positif de n.

3. On considère le nombre $2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$.
Dresser la liste des douze diviseurs de 60 en indiquant leur décomposition.

$$2^0 \times 3^0 \times 5^0 = 1$$
$$2^1 \times 3^0 \times 5^0 = 2$$
$$2^0 \times 3^1 \times 5^0 = 3$$

$$2^2 \times 3^0 \times 5^0 = 4$$
$$2^0 \times 3^0 \times 5^1 = 5$$
$$2^1 \times 3^1 \times 5^0 = 6$$
$$2^1 \times 3^0 \times 5^1 = 10$$
$$2^2 \times 3^1 \times 5^0 = 12$$
$$2^0 \times 3^1 \times 5^1 = 15$$
$$2^2 \times 3^0 \times 5^1 = 20$$
$$2^1 \times 3^1 \times 5^1 = 30$$
$$2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$$

4. Est-il vrai que tous les nombres entiers naturels non nuls et inférieurs ou égaux à 200 admettent une décomposition $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$ où a, b et c sont des entiers naturels ? Justifier la réponse.

   On considère $n = 7$ qui est un nombre premier, et qui est aussi un nombre entier naturel non nul inférieur ou égal à 200. On raisonne par l'absurde en supposant que $n = 7$ admette une décomposition $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$, où a, b, et c désignent des entiers naturels. Dans ce cas, au moins un des entiers a, b, c doit être non nul car $2^0 \times 3^0 \times 5^0 = 1$ qui est différent de $n = 7$. Si $a > 0$, alors $2 = 2^1 \times 3^0 \times 5^0$ est un diviseur de $n = 7$, ce qui n'est pas possible car $n = 7$ est premier. De même, si $b > 0$, alors 3 divise n et si $c > 0$ alors 5 divise n, ce qui n'est pas possible à chaque fois. Ainsi $n = 7$ n'admet pas de décomposition $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$. Il n'est donc pas vrai que tous les entiers naturels non nuls et inférieurs ou égaux à 200 admettent une décomposition $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$.

5. Soit n un nombre plouton admettant comme décomposition $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$.
   Montrer que $d(n) = (a + 1) \times (b + 1) \times (c + 1)$.

   Un diviseur positif de $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$ correspond à une liste (α, β, γ) telle que $0 \leqslant \alpha \leqslant a$, $0 \leqslant \beta \leqslant b$ et $0 \leqslant \gamma \leqslant c$. On a donc $a + 1$ choix pour α, $b + 1$ choix pour β et $c + 1$ choix pour γ. Ainsi $d(n) = (a + 1) \times (b + 1) \times (c + 1)$.

6. Soit n un nombre entier naturel admettant comme décomposition $2^a \times 3^b \times 5^c$.

   a) Montrer que si n est un nombre plouton, alors $a \geqslant b \geqslant c$.

      Soit n un nombre plouton admettant comme décomposition $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$.
      Supposons $a < b$. On considère alors $n' = 2^b \times 3^a \times 5^c$. Comme $2^b \times 3^a = 2^a \times 2^{b-a} \times 3^a$ et $2^{b-a} < 3^{b-a}$, on en déduit $2^b \times 3^a < 2^a \times 3^{b-a} \times 3^a$ où $2^a \times 3^{b-a} \times 3^a = 2^a \times 3^b$. On en déduit $2^b \times 3^a < 2^a \times 3^b$ d'où $n' < n$. De plus $d(n') = (b + 1) \times (a + 1) \times (c + 1) = d(n)$ ce qui contredit l'hypothèse que n est un nombre plouton. Ainsi $a < b$ n'est pas possible d'où $a \geqslant b$.
      On démontre de manière analogue en considérant $n'' = 2^a \times 3^c \times 5^b$ que l'on a nécessairement $b \geqslant c$.

   b) Montrer que la réciproque de la question 6.(a) est fausse en considérant le nombre 30.

   $30 = 2^a \times 3^b \times 5^c$ où $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ et vérifie $a \leqslant b \leqslant c$.
   $d(30) = (1 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 8$. D'après la question 3 de la partie A, on a $d(24) = 8$ donc 30 n'est pas un nombre plouton.

7. Compléter le tableau de l'**annexe 2** (**à rendre avec votre copie**) contenant les 21 nombres inférieurs à 200 admettant une décomposition de la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$.

a	b	c	$n = 2^a \times 3^b \times 5^c$	$d(n)$
0	0	0	1	1
1	0	0	2	2
1	1	0	6	4
1	1	1	30	8
2	0	0	4	3
2	1	0	12	6
2	1	1	60	12
2	2	0	36	9
2	2	1	180	18
3	0	0	8	4
3	1	0	24	8
3	1	1	120	16
3	2	0	72	12
4	0	0	16	5
4	1	0	48	10
4	2	0	144	15
5	0	0	32	6
5	1	0	96	12
6	0	0	64	7
6	1	0	192	14
7	0	0	128	8

8. Déterminer les dix nombres ploutons inférieurs à 200.
   Parmi les nombres du tableau de la question précédente, on peut éliminer :
   - 1 qui n'est pas un nombre plouton ;
   - 30 car $d(30) = d(24)$;
   - 8 car $d(4) = d(6)$;
   - 72 car $d(72) = d(60)$;
   - 16 car $d(16) < d(12)$;
   - 144 car $d(144) < d(120)$;
   - 32 car $d(32) = d(12)$;
   - 96 car $d(96) = d(60)$;
   - 64 car $d(64) < d(60)$;
   - 192 car $d(192) < d(120)$;
   - 128 car $d(128) < d(120)$;

   Par élimination, on obtient les 10 nombres ploutons inférieurs à 200 :

$$2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180$$

Exercice 3 (candidats de la voie générale NE suivant PAS l'enseignement «spé maths» et TOUS les candidats de la voie technologique)

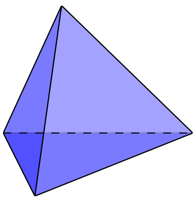
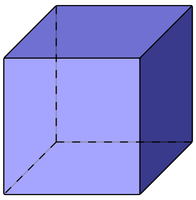
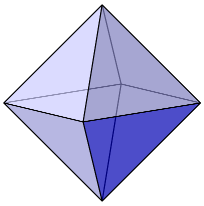
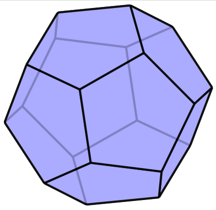
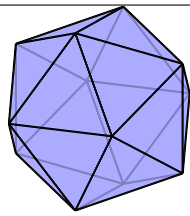
Platon footballeur

Cet exercice comprend une page annexe à rendre avec votre copie.

À la fin des années soixante, pour préparer la coupe du monde de football de 1970, la fédération de football du Mexique décide de la fabrication d'un nouveau type de ballon. Elle demande à une équipe d'ingénieurs de se charger des recherches. L'équipe décide de considérer, comme base de travail, les solides de Platon.

Partie A - Les solides de Platon

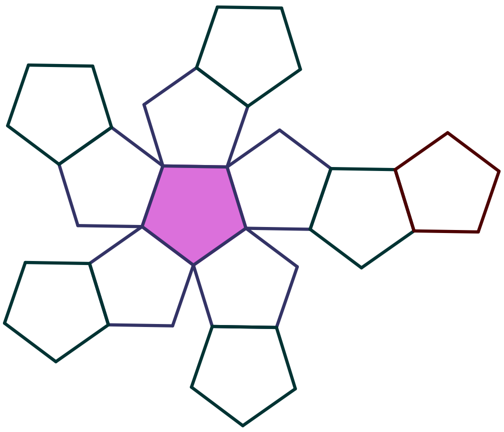
Les **solides de Platon** sont les cinq seuls solides dont les faces sont des polygones réguliers.

Les solides de Platon				
Tétraèdre	Hexaèdre (cube)	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre
				

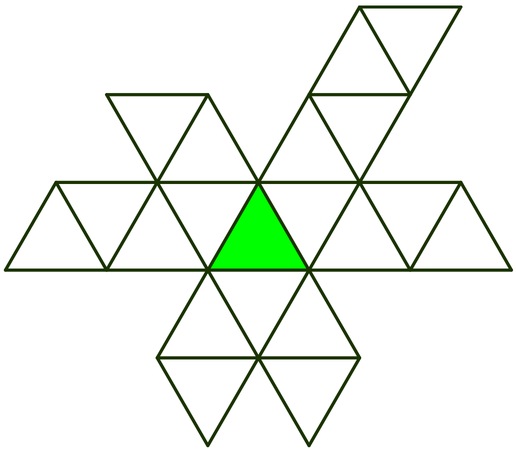
Pour un solide de Platon, on note F le nombre de faces, S le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes.

Compléter le tableau sur l'**annexe partie A** (**à rendre avec votre copie**). L'avant-dernière colonne est un calcul à faire sur les nombres indiqués dans les trois colonnes précédentes.

On pourra s'aider des patrons de certains solides de Platon ci-dessous.



Patron du dodécaèdre



Patron de l'icosaèdre

Partie B - Angles et faces

Chaque face d'un solide de Platon est un polygone régulier, c'est-à-dire un polygone dont les sommets sont situés sur un même cercle, et qui a tous ses côtés de même longueur.

Par exemple :

- une face d'un tétraèdre régulier est un triangle équilatéral ;
- une face d'un cube est un carré ;
- une face d'un dodécaèdre régulier est un pentagone régulier.

Face d'un tétraèdre régulier

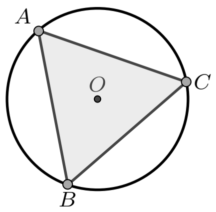


Figure 1

Face d'un cube

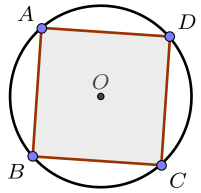


Figure 2

Face d'un dodécaèdre régulier

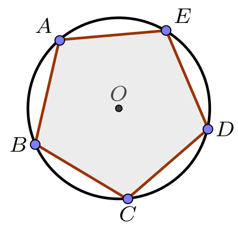


Figure 3

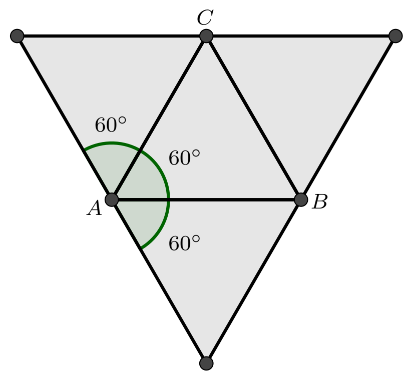
Dans la suite du problème, on choisira de donner les mesures des angles demandées en degrés (°).

1. Rappeler, sans justifier, une mesure de l'angle géométrique :
   a) $\widehat{BAC}$ du triangle équilatéral (Figure 1). 60°
   b) $\widehat{BAD}$ du carré (Figure 2). 90°
2. Justifier, dans le cas du pentagone régulier (Figure 3), que $\widehat{BAE}$ mesure 108°.
   Le pentagone ayant 5 côtés, l'angle $\widehat{AOE}$ mesure $360° : 5 = 72°$. AOE étant isocèle en O, $\widehat{OAE}$ mesure $(180° - 72°) : 2 = 54°$. (AO) étant la bissectrice de l'angle $\widehat{BAE}$, celui-ci a pour mesure $2 \times 54° = 108°$

Partie C - Rotondité

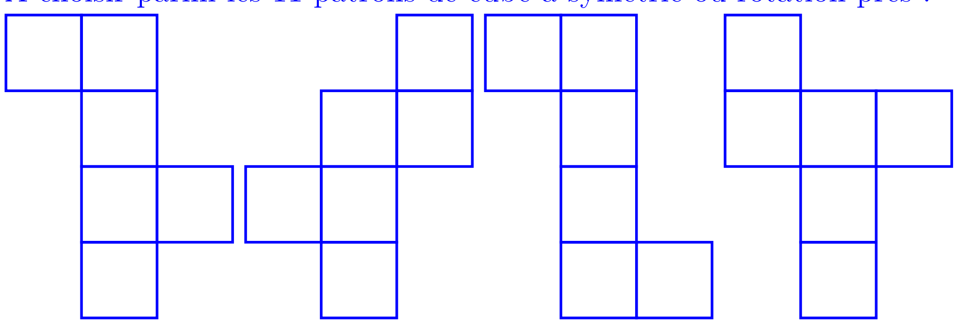
Pour évaluer la **rotondité** d'un polyèdre (le fait que le polyèdre se rapproche plus ou moins d'une sphère), les ingénieurs décident de calculer la somme des angles vus d'un des sommets du polyèdre, en se disant que plus cette somme est proche de 360°, plus le polyèdre sera «rond».

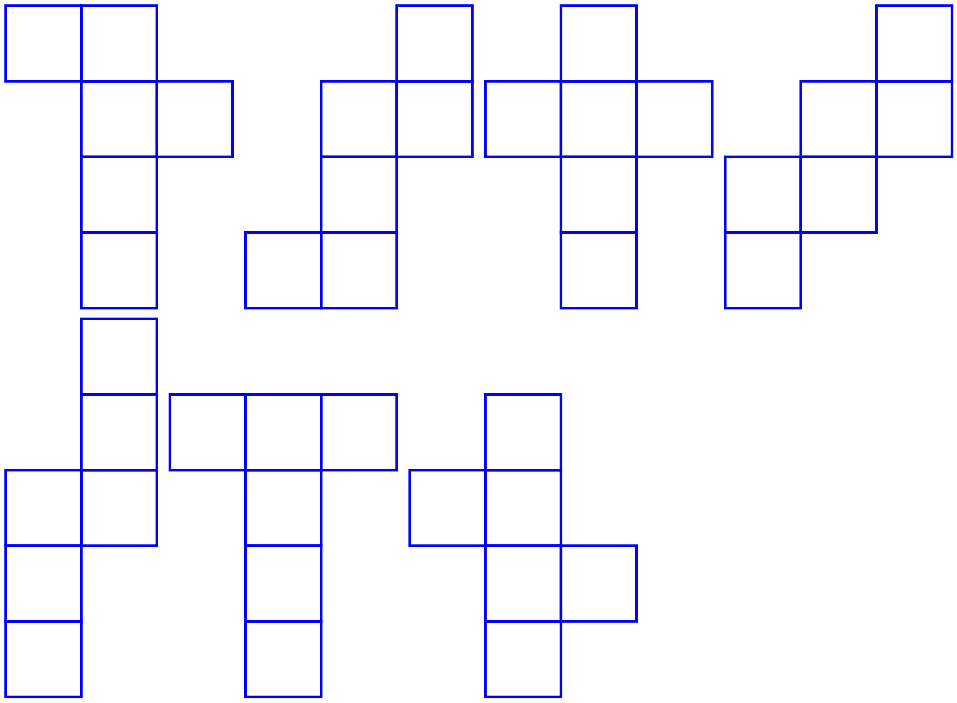
On admet que la rotondité d'un solide évoqué dans ce sujet est la même en chaque sommet.



Par exemple pour le tétraèdre régulier, on trouve comme rotondité 180° en se reportant au patron et en effectuant la somme des trois angles de sommet A, des trois triangles équilatéraux (voir figure ci-contre).

1. a) Dessiner un patron de cube.
   À choisir parmi les 11 patrons de cube à symétrie ou rotation près :





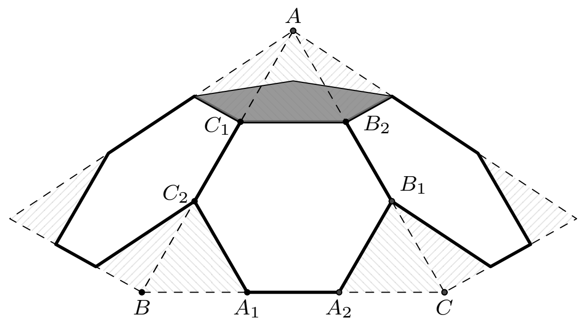
b) Choisir un des sommets du patron pour calculer la rotondité du cube comme sur l'exemple du tétraèdre.
$3 \times 90° = 270°$ La rotondité du cube est de 270°.

2. Compléter le tableau sur l'**annexe partie C** (**à rendre avec votre copie**).
3. Quel solide auraient dû alors proposer les ingénieurs ?
Les ingénieurs auraient dû proposer le dodécaèdre qui a une rotondité de 324°.

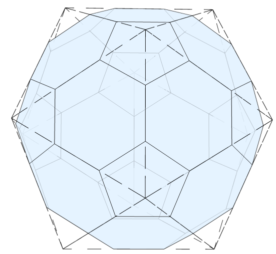
Partie D - Retour au ballon de football

Les ingénieurs décident d'améliorer la rotondité de l'icosaèdre, en lui apportant des modifications. Ils procèdent de la manière suivante :

- Chaque côté d'une face triangulaire est découpé en trois segments de même longueur. Par exemple, sur la figure ci-contre, le côté $[AB]$ de la face ABC est découpé en trois segments $[AC_1]$, $[C_1C_2]$ et $[C_2B]$ de même longueur. La même chose est réalisée pour les deux autres côtés $[AC]$ et $[BC]$ et les triangles AC_1B_2, BA_1C_2 et CB_1A_2 sont enlevés.
- L'hexagone régulier $C_1C_2A_1A_2B_1B_2$ ainsi obtenu forme une face du nouveau solide.
- Et les bases des 5 triangles enlevés de sommet A forment un pentagone régulier (en gris sur la figure) et constitue une nouvelle face du solide.
- Sur la figure ci-contre les hachures représentent les faces retirées et, en gris foncé, un des pentagones.



En réalisant cette transformation sur chacune des faces de l'icosaèdre, les ingénieurs obtiennent ainsi un nouveau solide que nous allons maintenant étudier. Le patron de ce solide est donné ci-dessous.



1. Combien et quels types de polygones voit-on depuis chaque sommet de ce nouveau solide ? (par exemple à partir du sommet C_1)

   À partir de C_1 on voit 2 hexagones et 1 pentagone.

2. Calculer la rotondité à partir du sommet C_1.

   Les 2 hexagones et le pentagone donnent donc une rotondité de $2 \times 120° + 108° = 348°$

3. Ce nouveau solide répond-il mieux que les solides de Platon aux exigences de rotondité ?

   Oui car $348° > 324°$

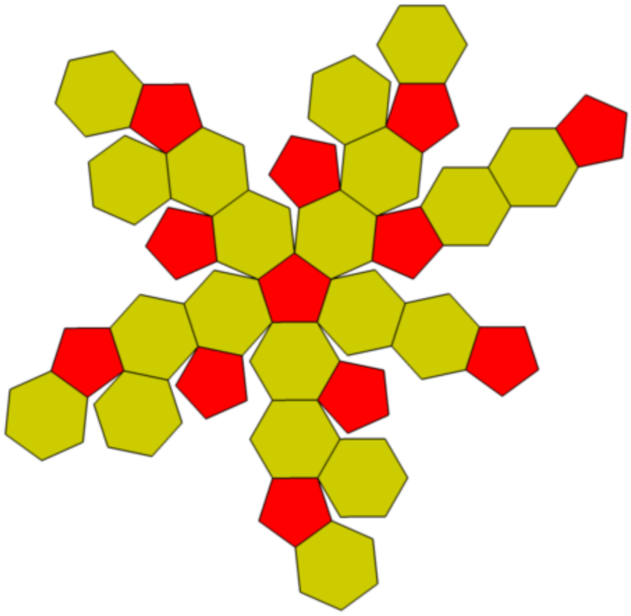
4. Donner les nombres de faces (F), de sommets (S) et d'arêtes (A) de ce solide, en justifiant les réponses.

   L'icosaèdre régulier a 12 sommets qui produiront donc 12 pentagones et a 20 faces qui deviendront 20 hexagones donc ce solide a 32 faces.
   De chaque sommet partent 3 faces. Donc on doit diviser le nombre total de sommets de chaque type de face par 3 : $(12 \times 5 + 20 \times 6) : 3 = 180 : 3 = 60$. Le solide a 60 sommets.
   De chaque arête partent 2 faces. Donc on doit diviser le nombre total d'arêtes de chaque type de face par 2 : $(12 \times 5 + 20 \times 6) : 2 = 180 : 2 = 90$. Le solide a 90 arêtes.

5. Calculer $F + S - A$.

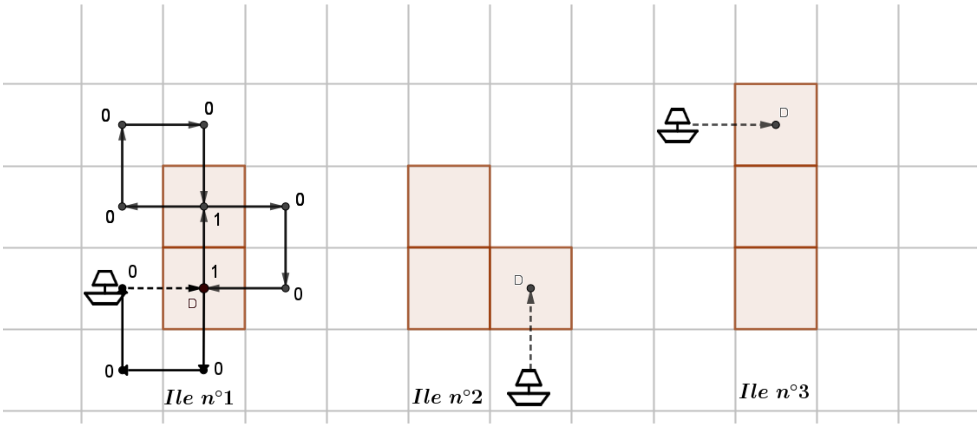
   $F + S - A = 32 + 60 - 90 = 2$.

Patron du ballon de football.

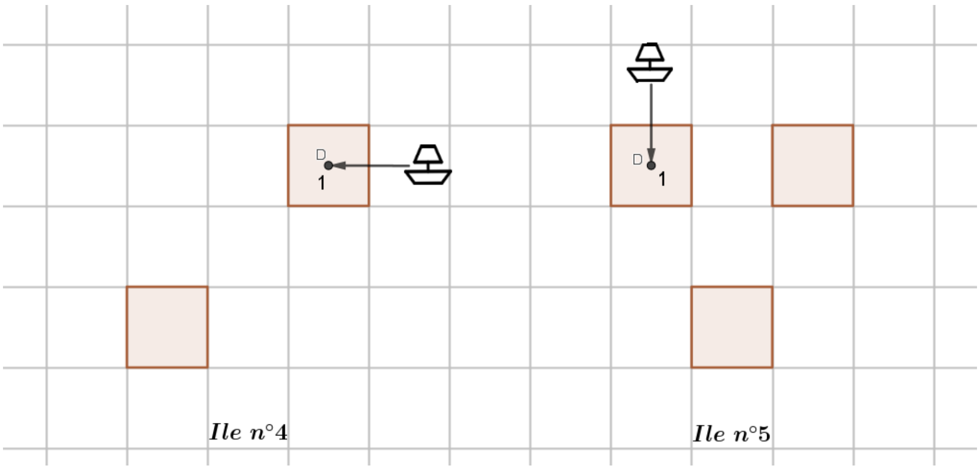


Annexe - L'île aux pixels - À rendre avec la copie

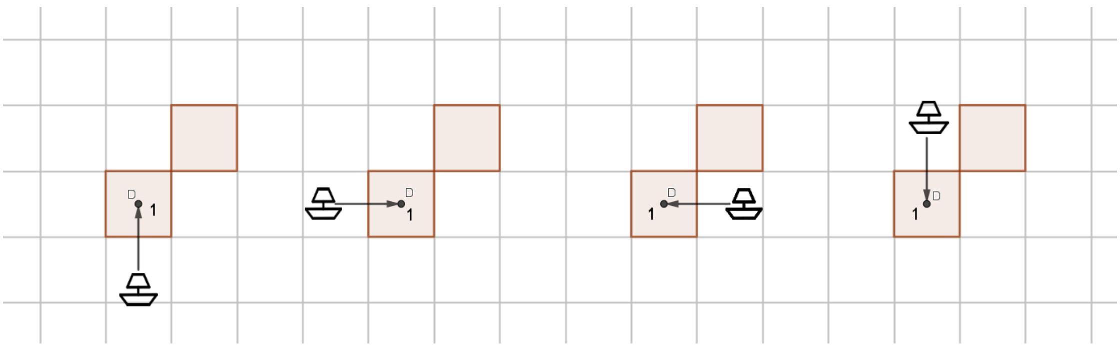
Annexe A1



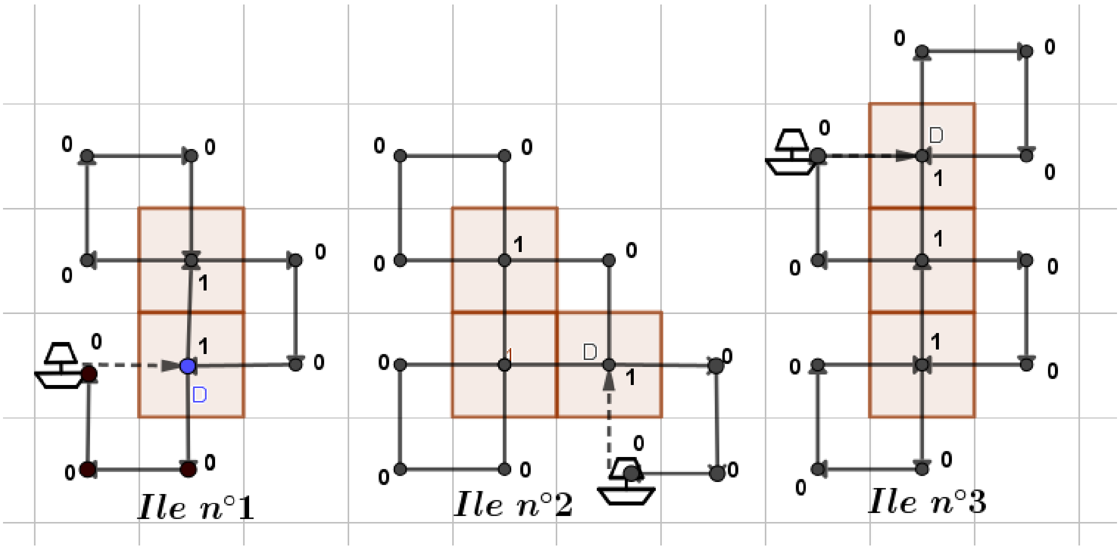
Annexe A2

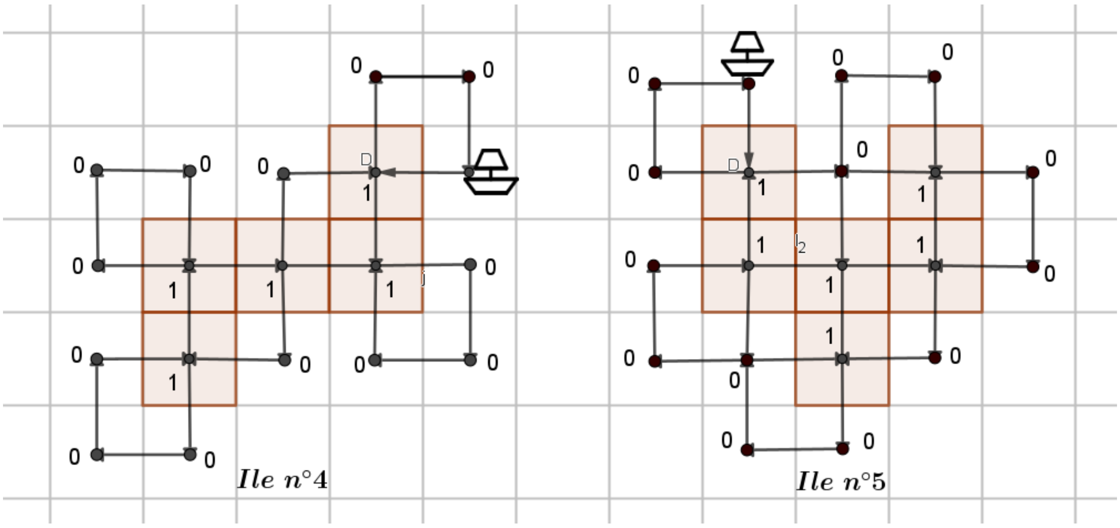


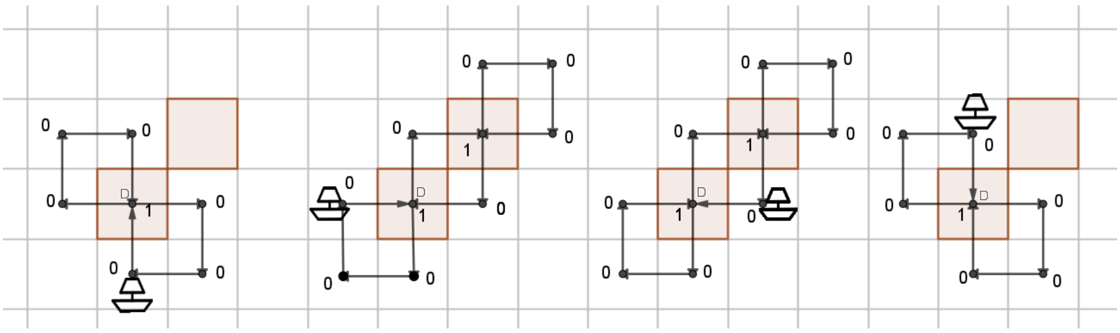
Annexe C1



Correction







Annexe - Les nombres ploutons - À rendre avec la copie

Annexe 1 (Partie A question 1)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$d(n)$												

Annexe 2 (Partie B question 7)

a	b	c	$n = 2^a \times 3^b \times 5^c$	$d(n)$
0	0	0	1	1
1	0	0	2	2
1	1	0	6	
1	1	1		
2	0	0		
2	1	0		
2	1	1		
2	2	0		
2	2	1		
3				
3				
3				
3				
4				
4				
4				
5				
5				
6				
6				
7				

Annexe - Platon footballeur - À rendre avec la copie

Annexe partie A

Nom du polyèdre	Nombre de faces (F)	Nombre de sommets (S)	Nombre d'arêtes (A)	$F+S-A$	Nature de la face
Tétraèdre	4	4	6	2	triangle équilatéral
Cube	6	8	12	2	carré
Octaèdre	8	6	12	2	triangle équilatéral
Dodécaèdre	12	20	30	2	pentagone régulier
Icosaèdre	20	12	30	2	triangle équilatéral

Annexe partie C

Nom du polyèdre	Nom du polygone (face)	Nombres de polygones réguliers partant d'un sommet du polyèdre	Angle formé par 2 côtés du polygone	Somme des angles des polygones vus d'un sommet du polyèdre
Tétraèdre	triangle équilatéral	3	60°	$3 \times 60° = 180°$
Cube	carré	3	90°	270°
Octaèdre	triangle équilatéral	4	60°	240°
Dodécaèdre	pentagone régulier	3	108°	324°
Icosaèdre	triangle équilatéral	5	60°	300°