Olympiades nationales de mathématiques 2024

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures) :

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques («Spé Maths»), et uniquement ceux-là, doivent traiter **les exercices académiques 1 et 2**.
- **Tous les autres candidats**, c'est-à-dire ceux de la voie générale **N**'ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD, etc.), doivent traiter **les exercices académiques 1 et 3**.

Chaque candidat traite ainsi deux exercices académiques selon sa catégorie, l'exercice 1 et l'exercice 2, ou bien l'exercice 1 et l'exercice 3.

Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

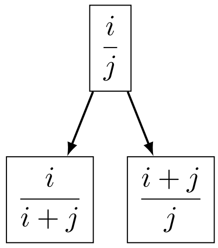
L'énoncé académique comporte 13 pages.

Exercice 1 (tous les candidats)

Génération à la suite

Partie A - Les fils d'une fraction strictement positive

Soient i et j des entiers strictement positifs.
On dit que les deux **fils** de la fraction $\frac{i}{j}$ sont les fractions $\frac{i}{i+j}$ et $\frac{i+j}{j}$.
On dit que $\frac{i}{i+j}$ est le **fils gauche** et que $\frac{i+j}{j}$ est le **fils droit** de $\frac{i}{j}$.
L'arbre ci-contre illustre la situation.



Par exemple, $\frac{7}{5}$ a deux fils : son fils gauche est $\frac{7}{7+5} = \frac{7}{12}$ et son fils droit est $\frac{7+5}{5} = \frac{12}{5}$.

1. Quels sont les deux fils de $\frac{8}{9}$?

   Son fils gauche est $\frac{8}{8+9} = \frac{8}{17}$ et son fils droit est $\frac{8+9}{9} = \frac{17}{9}$

2. Trouver la fraction dont un des fils est $\frac{3}{8}$.

   La fraction est $\frac{3}{5}$

3. Trouver la fraction dont un des fils est $\frac{111}{7}$.

   La fraction est $\frac{104}{7}$

4. De manière générale, justifier que l'un des fils de $\frac{i}{j}$ est inférieur strictement à 1 et que l'autre est supérieur strictement à 1.

   $0 < i < i+j$ donc, en divisant par $i+j$ qui est supérieur à 0, on obtient : $0 < \frac{i}{i+j} < 1$

   De plus $i > 0$ donc $j < i+j$. En divisant par j qui est supérieur à 0, on obtient : $1 < \frac{i+j}{j}$

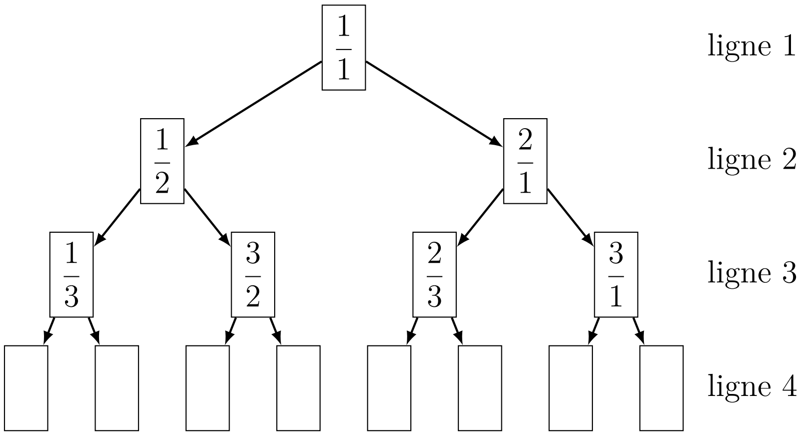
   Le fils gauche est inférieur à 1 et le fils droit est supérieur à 1.

   Autre méthode : $\frac{i+j}{j} = \frac{i}{j} + \frac{j}{j} = \frac{i}{j} + 1 > 1$ et $\frac{i}{i+j} = \frac{i+j-j}{i+j} = \frac{i+j}{i+j} - \frac{j}{i+j} = 1 - \frac{j}{i+j} < 1$

Partie B - Arbre et suite de Calkin-Wilf

L'**arbre de Calkin-Wilf** s'obtient en prenant la fraction $\frac{1}{1}$ à la racine et en associant à chaque fraction ses deux fils (comme dans la partie A).

On a commencé à représenter les quatre premières lignes de cet arbre :



1. Donner, sur sa copie, toutes les fractions de la ligne 4 de cet arbre.

   Il y a huit fractions : $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{4}{3}$; $\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{5}{2}$; $\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{5}{3}$; $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{4}{1}$

2. Montrer que la fraction $\dfrac{44}{13}$ apparaît dans l'arbre. Sur quelle ligne apparaît-elle ?

   $\dfrac{31}{13}$ a pour fils droit $\dfrac{44}{13}$; $\dfrac{18}{13}$ a pour fils droit $\dfrac{31}{13}$; $\dfrac{5}{13}$ a pour fils droit $\dfrac{18}{13}$
   $\dfrac{5}{8}$ a pour fils gauche $\dfrac{5}{13}$; $\dfrac{5}{3}$ a pour fils gauche $\dfrac{5}{8}$.

   Comme $\dfrac{5}{3}$ est sur la ligne 4, on en déduit que $\dfrac{44}{13}$ est bien dans l'arbre.

   Plus précisément, $\dfrac{5}{8}$ est sur la ligne 5, $\dfrac{5}{13}$ est sur la ligne 6, $\dfrac{18}{13}$ est sur la ligne 7, $\dfrac{31}{13}$ est sur la ligne 8, et $\dfrac{44}{13}$ est sur la ligne 9.

La **suite de Calkin-Wilf** est la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ des fractions lues de gauche à droite, ligne par ligne en descendant l'arbre de Calkin-Wilf.

Ainsi, les premiers termes de la suite (u_n) sont :

$u_1 = \dfrac{1}{1}$, $\quad u_2 = \dfrac{1}{2}$, $\quad u_3 = \dfrac{2}{1}$, $\quad u_4 = \dfrac{1}{3}$, $\quad u_5 = \dfrac{3}{2}$, $\quad u_6 = \dfrac{2}{3}$, $\quad u_7 = \dfrac{3}{1}$.

3. Donner la fraction égale à u_{32}.
   Il y 8 nombres sur la ligne 4 donc $u_{7+8} = u_{15}$ est le dernier nombre de la ligne 4.
   Il y $8 \times 2 = 16$ nombres sur la ligne 5 (car chaque fraction a deux fils) donc $u_{15+16} = u_{31}$ est le dernier nombre de la ligne 6.
   Par conséquent u_{32} est le premier nombre de la ligne 7. u_{32} est donc le fils gauche de u_{16}.
   u_{16} est le fils gauche de u_8 qui est lui même le fils gauche de u_4.
   Ainsi : $u_8 = \dfrac{1}{4}$; $u_{16} = \dfrac{1}{5}$ et $u_{32} = \dfrac{1}{6}$
4. On constate que les deux fils de u_3 sont u_6 et u_7.
   Recopier et compléter, sur sa copie, les deux phrases suivantes (aucune justification n'est attendue).
   «Les deux fils de u_6 sont $u_{\dots}$ et $u_{\dots}$.»
   «Si n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1, les deux fils de u_n sont $u_{\dots}$ et $u_{\dots}$.»
   Les deux fils de u_6 sont u_{12} et u_{13}. Les deux fils de u_n sont u_{2n} et u_{2n+1}.

Partie C - Suite de Stern

La **suite de Stern** est la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ dont les termes sont les numérateurs des fractions lues de gauche à droite, ligne par ligne en descendant l'arbre de Calkin Wilf.

Cette suite commence donc par : $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_3 = 2$, $v_4 = 1$, $v_5 = 3$, $v_6 = 2$, $v_7 = 3$.

1. Donner les valeurs numériques de v_8 à v_{15}.
   $v_8 = 1$; $v_9 = 4$; $v_{10} = 3$; $v_{11} = 5$; $v_{12} = 2$; $v_{13} = 5$; $v_{14} = 3$; $v_{15} = 4$
   On admet que **pour tout entier naturel n non nul**, le dénominateur de la n^{e} fraction de la suite de Calkin-Wilf est égal au numérateur de la $(n+1)^{\text{e}}$.
   Autrement dit, on admettra que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\quad u_n = \dfrac{v_n}{v_{n+1}}$.
2. Utiliser les questions précédentes pour montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a les égalités suivantes : $v_{2n} = v_n$ et $v_{2n+1} = v_n + v_{n+1}$.
   D'une part, le fils gauche de u_n est $\dfrac{v_n}{v_n + v_{n+1}}$ (voir définition de la partie A).
   D'autre part, d'après la réponse à la question 4) de la partie B, le fils gauche de u_n est $u_{2n} = \dfrac{v_{2n}}{v_{2n+1}}$.
   Ainsi $v_{2n} = v_n$ et $v_{2n+1} = v_n + v_{n+1}$.
3. En déduire les valeurs numériques de v_{64} et v_{65}.
   Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $v_n = v_{2n}$
   Donc : $v_1 = v_2 = v_4 = v_8 = v_{16} = v_{32} = v_{64}$ donc $v_{64} = 1$.
   Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $v_{2n+1} = v_n + v_{n+1}$.

Donc : $v_{32}+v_{33}=v_{65}$ donc $v_{65}=1+v_{33}$ or $v_{16}+v_{17}=v_{33}$ donc $v_{33}=1+v_{17}$ or $v_8+v_9=v_{17}$ donc $v_{17}=1+4=5$.

Ainsi $v_{33}=1+v_{17}=1+5=6$; $v_{65}=1+v_{33}=1+6=7$.

Exemple de programme Python calculant l'arbre de Calkin Wilf.

```python
from math import *

def fg(x):  # x de la forme (i,j), calcule le fils gauche de x
    (i,j) = x
    return (i,i+j)

def fd(x):  # x de la forme (i,j), calcule le fils droit de x
    (i,j) = x
    return (i+j,j)

def nouvel_étage(L):  # à partir d'un étage de l'arbre, calcule l'étage suivant
    nL = []
    for x in L:
        nL.append(fg(x))
        nL.append(fd(x))
    return nL

def arbre(nb_étage):   # nb_étage > 0, construit les n premiers étages de l'arbre
    A = [[(1,1)]]
    for i in range(1,nb_étage):
        A.append(nouvel_étage(A[i-1]))
    return A

def u(n):   # n > 0, suite de Calkin-Wilf
    nb_étage = int(log(n,2)) + 1
    A = arbre(nb_étage)
    L = []
    for X in A:
        L = L + X
    return L[n-1]

def v(n):   # n > 0, suite de Stern
    (i,j) = u(n)
    return i

"""
EXEMPLES D'UTILISATION
>>> fg((3,5))
(3, 8)
>>> fd((3,5))
(8, 5)
>>> arbre(4)
[[(1, 1)],
 [(1, 2), (2, 1)],
 [(1, 3), (3, 2), (2, 3), (3, 1)],
 [(1, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 2), (2, 5), (5, 3), (3, 4), (4, 1)]]
>>> u(10)
(3, 5)
>>> v(10)
3
"""
```

Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant la «spé maths»)

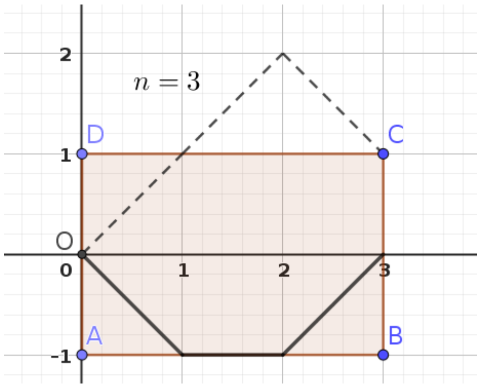
Parcours gagnants !

Dans cet exercice, on se place dans un repère orthonormé d'origine O et n désigne un entier naturel non nul.

Max le robot est positionné initialement au point O. Il enchaîne n translations consécutives choisies de manière aléatoire et équiprobable parmi les translations de vecteurs $\overrightarrow{u}(1;1)$, $\overrightarrow{v}(1;0)$ ou $\overrightarrow{w}(1;-1)$. Max le robot parvient au point d'arrivée d'abscisse n.

On appelle **parcours** une liste ordonnée de n vecteurs choisis parmi les vecteurs $\overrightarrow{u}(1;1)$, $\overrightarrow{v}(1;0)$ ou $\overrightarrow{w}(1;-1)$. On appelle alors n la **taille** du parcours.

Dans le repère orthonormé ci-dessous, est représenté en pointillés un exemple de parcours de taille 3 de Max : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$. Le point d'arrivée de Max est le point de coordonnées $(3;1)$.



Un parcours de taille n est dit **gagnant** si Max n'est jamais sorti du rectangle ABCD, côtés inclus, où $A(0;-1)$, $B(n;-1)$, $C(n;1)$, $D(0;1)$.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, le parcours $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ en pointillés, n'est pas gagnant alors que le parcours $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$, en trait plein, est gagnant.

L'objectif de cet exercice est de calculer la probabilité qu'un parcours de taille n donnée soit gagnant.

Partie A - Cas n = 3

Dans cette partie, on fixe $n = 3$.

1. Combien a-t-on de parcours possibles ?
   On a $3 \times 3 \times 3 = 27$ parcours possibles de Max.
2. Citer les listes des parcours gagnants dont le premier vecteur est $\overrightarrow{u}$.
   On en a 5 : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}), (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}), (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}), (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}), (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w})$.
3. Citer les listes des parcours gagnants dont le premier vecteur est $\overrightarrow{v}$.
   On en a 7 : $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}), (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}), (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}), (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}), (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}), (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$.
4. En déduire que la probabilité qu'un parcours de taille 3 soit gagnant est égale à $\dfrac{17}{27}$.
   De manière analogue à la question 2, il y a 5 parcours gagnants de Max dont le premier vecteur de la liste est $\overrightarrow{w}$. Ainsi on a $5 + 7 + 5 = 17$ parcours gagnants parmi 27 parcours possibles.

Partie B - Une simulation

On considère la fonction incomplète écrite en Python ci-dessous :

```
1  from random import *
2
3  def parcours(n):
4     y = 0
5     gagnant = True
6     for x in range(1,n+1) :
7        vecteur = choice(["u","v","w"])
8        if vecteur == "u" :
9           y = y + 1
10       if vecteur == "w" :
11          ...
12       if y > 1 or ... :
13          gagnant = False
14    return gagnant
```

• L'instruction `range(1,n+1)` correspond à la liste des entiers 1, 2, ... , `n`.
• L'instruction `choice(["u","v","w"])` permet de choisir une lettre, au hasard, et de manière équiprobable, parmi les lettres `u`, `v` et `w`.

Préciser comment compléter les lignes 11 et 12 de la fonction `parcours(n)` afin qu'elle réalise une simulation d'un parcours de Max de taille `n` et renvoie `True` si ce parcours est gagnant et `False` sinon.

Ligne 11 : `y = y - 1`
Ligne 12 : `if y > 1 or y < -1` :

Partie C - Calculs de proche en proche

Dans la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.

On note :

- a_n le nombre de parcours de taille n qui sont gagnants et dont le point d'arrivée est de coordonnées $(n; 1)$;
- b_n le nombre de parcours de taille n qui sont gagnants et dont le point d'arrivée est de coordonnées $(n; 0)$;
- c_n le nombre de parcours de taille n qui sont gagnants et dont le point d'arrivée est de coordonnées $(n; -1)$;
- On note T_n le nombre de parcours de taille n qui sont gagnants. On a donc $T_n = a_n + b_n + c_n$.

1. Quelles sont les valeurs de a_1, b_1, c_1 et T_1 ?
   $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ et $T_1 = 3$.
2. On admet que l'on a $a_n = c_n$.
   a) Justifier la relation $a_{n+1} = a_n + b_n$.
   Il y a deux manières d'obtenir un parcours gagnant arrivant au point $(n + 1; 1)$: soit avec un parcours gagnant arrivant au point $(n; 1)$ suivi de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$; soit avec un parcours gagnant arrivant au point $(n; 0)$ suivi de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Ainsi on obtient la relation $a_{n+1} = a_n + b_n$.
   b) Justifier la relation $b_{n+1} = 2a_n + b_n$.
   Il y a trois manières d'obtenir un parcours gagnant arrivant au point $(n + 1; 0)$: soit avec

un parcours gagnant arrivant au point $(n;1)$ suivi de la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$; soit avec un parcours gagnant arrivant au point $(n;0)$ suivi de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$; soit avec un parcours gagnant arrivant au point $(n;-1)$ suivi de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Ainsi on obtient la relation $b_{n+1} = a_n + b_n + c_n = 2a_n + b_n$.

c) Démontrer alors la relation $T_{n+2} = 2T_{n+1} + T_n$.
$T_{n+2} = 2a_{n+2} + b_{n+2}$
$T_{n+2} = 2(a_{n+1} + b_{n+1}) + (2a_{n+1} + b_{n+1})$
$T_{n+2} = 4a_{n+1} + 3b_{n+1}$ où $4a_{n+1} + 2b_{n+1} = 2(2a_{n+1} + b_{n+1}) = 2T_{n+1}$ et $b_{n+1} = 2a_n + b_n = T_n$
Ainsi on obtient bien $T_{n+2} = 2T_{n+1} + T_n$.

3. Recopier et compléter sur sa copie le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5
a_n					
b_n					
T_n					

n	1	2	3	4	5
a_n	1	2	5	12	29
b_n	1	3	7	17	41
T_n	3	7	17	41	99

4. Démontrer que la probabilité qu'un parcours de taille 5 soit gagnant est égal à $\dfrac{11}{27}$.
Pour $n = 5$, on a $3^5 = 243$ parcours possibles dont 99 qui sont gagnants. Ainsi la probabilité qu'un parcours de Max soit gagnant est égale à $\dfrac{99}{243} = \dfrac{11}{27}$.

Partie D - Expression explicite

Les nombres T_n sont ceux définis à la partie C.

On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$T_{n+2} = 2T_{n+1} + T_n$$

Ce résultat pourra être utilisé dans cette partie même s'il n'a pas été démontré dans la partie B.

1. Déterminer les valeurs exactes des deux nombres réels distincts x_1 et x_2 qui sont solutions de l'équation $x^2 = 2x + 1$ et telles que $x_1 < x_2$.
On se ramène à l'équation du second degré $x^2 - 2x - 1 = 0$.
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$
Comme $\Delta > 0$, on en déduit que cette équation admet deux solutions réelles qui sont $x_1 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times 1} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times 1} = 1 + \sqrt{2}$.
2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} {x_1}^n + \frac{1 + \sqrt{2}}{2} {x_2}^n$$

où x_1 et x_2 sont les nombres réels définis à la question précédente.

a) Vérifier que l'on a $u_1 = T_1$.

D'après le tableau de la question C.3, on a $T_1 = 3$.

$u_1 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{1+\sqrt{2}}{2}x_2$

$u_1 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2}) + \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})$

$u_1 = \frac{1}{2}[(1-\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2})^2)]$

$u_1 = \frac{1}{2}[(1-2\sqrt{2}+2+1+2\sqrt{2}+2]$

$u_1 = 3$

Ainsi on a bien $u_1 = T_1$.

On admettra que $u_2 = T_2$.

b) En utilisant ${x_1}^2 = 2x_1 + 1$ et ${x_2}^2 = 2x_2 + 1$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$.

Soit n un entier naturel non nul, on a :

$u_{n+2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}{x_1}^{n+2} + \frac{1+\sqrt{2}}{2}{x_2}^{n+2}$

$u_{n+2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}{x_1}^n{x_1}^2 + \frac{1+\sqrt{2}}{2}{x_2}^n{x_2}^2$

$u_{n+2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}{x_1}^n(2x_1+1) + \frac{1+\sqrt{2}}{2}{x_2}^n(2x_2+1)$

$u_{n+2} = 2\frac{1-\sqrt{2}}{2}{x_1}^{n+1} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}{x_1}^n + 2\frac{1+\sqrt{2}}{2}{x_2}^{n+1} + \frac{1+\sqrt{2}}{2}{x_2}^n$

$u_{n+2} = 2[\frac{1-\sqrt{2}}{2}{x_1}^{n+1} + \frac{1+\sqrt{2}}{2}{x_2}^{n+1}] + [\frac{1-\sqrt{2}}{2}{x_1}^n + \frac{1+\sqrt{2}}{2}{x_2}^n]$

On obtient bien finalement :

$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$

c) En déduire une expression explicite de T_n en fonction de n.

D'après les deux questions précédentes, on en déduit que les suites (T_n) et (u_n) sont égales car elles ont les mêmes premiers termes de rang 1 et 2, et vérifient la même relation de récurrence.

Pour tout entier naturel n non nul, on a donc :

$T_n = u_n$

$T_n = \frac{1-\sqrt{2}}{2}{x_1}^n + \frac{1+\sqrt{2}}{2}{x_2}^n$

$T_n = \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^n + \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^n$

$T_n = \frac{(1-\sqrt{2})^{n+1} + (1+\sqrt{2})^{n+1}}{2}$

d) En déduire la probabilité qu'un parcours de taille n soit gagnant en fonction de n.

La probabilité p_n qu'un parcours de Tom de taille n soit gagnant est :

$$p_n = \frac{T_n}{3^n}$$

$$p_n = \frac{(1-\sqrt{2})^{n+1} + (1+\sqrt{2})^{n+1}}{2 \times 3^n}$$

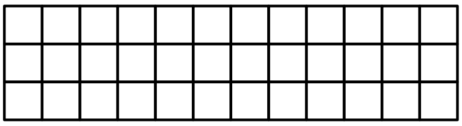
Exercice 3 (candidats de la voie générale NE suivant PAS l'enseignement «spé maths» et TOUS les candidats de la voie technologique)

Pavages en or

Cet exercice comprend une page annexe à rendre avec la copie.

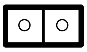
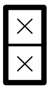
Définition : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Une **grille** est un quadrillage rectangulaire de largeur n carreaux et de hauteur h carreaux.

Par exemple, une grille de largeur 12 carreaux et de hauteur 3 carreaux est de la forme :

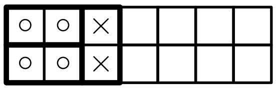


Partie A - Pavage d'une grille de hauteur 2 carreaux

Dans cette partie, on considère uniquement des grilles de largeur n carreaux et de hauteur 2 carreaux.
On souhaite paver cette grille (c'est-à-dire la recouvrir entièrement) à l'aide de briques rectangulaires :

- ▷ celles placées horizontalement désignées par 
- ▷ celles placées verticalement désignées par 

On ne peut pas superposer deux briques.

Par exemple, on peut débuter le pavage d'une grille de largeur 7 carreaux ainsi : 

Définition : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note $P(n)$ le **nombre de pavages** d'une grille de largeur n carreaux et de hauteur 2 carreaux.

1. Déterminer $P(1)$ et $P(2)$.
   $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$
2. On admet que $P(3) = 3$ et $P(4) = 5$.
   Sur les grilles données en **annexe A2, à rendre avec la copie**, dessiner tous les pavages pour $n = 3$ et $n = 4$. cf annexe
3. a) Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, $P(n+2) = P(n+1) + P(n)$.
   On pourra distinguer si la dernière colonne à droite contient une brique verticale ou non.
   - Si la dernière colonne comporte une brique verticale, il reste les $n+2-1$ colonnes précédentes à paver ce qui correspond à $P(n+1)$ possibilités.
   - Si la dernière colonne comporte une brique horizontale alors il y a en-dessous ou au-dessus d'elle une autre brique horizontale. Il reste ainsi les $n+2-2$ colonnes précédentes à paver ce qui correspond à $P(n)$ possibilités.
   - Donc, au total, on a $P(n+2) = P(n+1) + P(n)$

   b) En déduire $P(5)$ et $P(6)$.
   $P(4) = P(2+2) = P(3) + P(2) = 3 + 2 = 5$
   $P(5) = P(3+2) = P(4) + P(3) = 5 + 3 = 8$

4. a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer $P(n)$ pour $n \geqslant 3$.

```
1 def P(n):
2   p1=....
3   p2=....
4   for i in range(3,n+1):
5     p=....
6     p1=p2
7     p2=p
8   return p
```

L'instruction `range(3,n+1)` correspond à la liste des entiers 3, 4, ..., `n`.

Ligne 2 : `p1=1`
Ligne 3 : `p2=2`
Ligne 5 : `p=p1+q1`

b) Donner $P(10)$ sans justification.
$P(10) = 89$

Partie B - Le nombre d'or s'y cache

Définition :
On considère deux nombres réels strictement positifs a et b tels que $a > b$.
Le nombre d'or est l'unique rapport $\phi = \dfrac{a}{b}$ tel que $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$.

1. a) Montrer que ϕ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
$\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$ est équivalent à $1 + \dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{b}$ et donc $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$.
On a donc en multipliant par ϕ, $\phi^2 = \phi + 1$ et ϕ solution de $x^2 - x - 1 = 0$

b) En déduire que $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

On a $\Delta = 1 + 4 = 5$ et $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$ car $\phi > 0$.

2. a) Pour $n \geqslant 1$, on définit les nombres $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,\phi^{n+1}$.
En arrondissant si besoin les résultats à 0,1 près, recopier et compléter le tableau suivant :

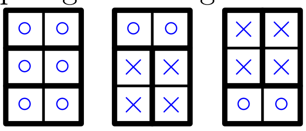
n	1	2	3	4	5	10
$P(n)$						
F_n						

n	1	2	3	4	5	10	15	20
$P(n)$	1	2	3	5	8	89	987	10946
F_n	1,2	1,9	3,1	4,96	8,0	89,0	987,0	10946,0

b) Que remarquez-vous ?
F_n donne la même valeur arrondie à l'entier que $P(n)$

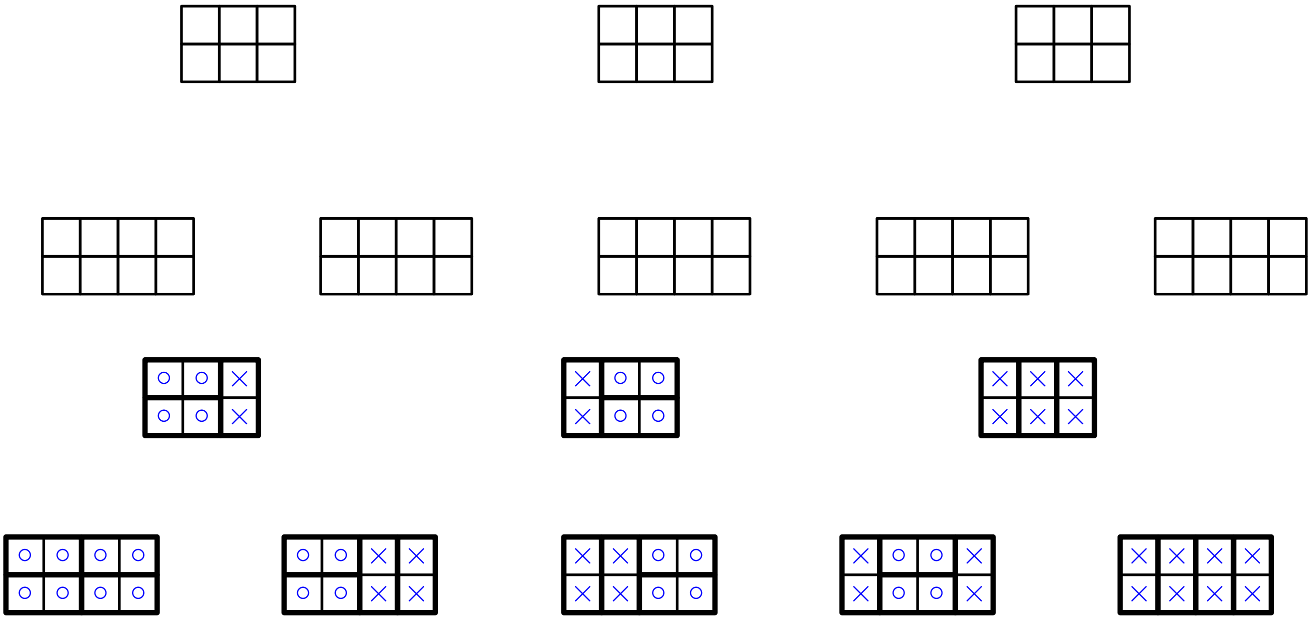
Partie C - Pavage d'une grille de hauteur 3 carreaux

On considère dans cette partie une grille de largeur n carreaux et de hauteur 3 carreaux.
On souhaite réaliser un pavage formé des mêmes briques rectangulaires utilisées dans la partie A.

1. Dans cette question uniquement, on considère une grille de largeur $n = 3$ carreaux.
   Est-il possible de paver une telle grille ? Justifier.
   Une brique est constituée de 2 carreaux donc un pavage comporte nécessairement un nombre pair de briques au total.
   Une grille de largeur 3 carreaux comporte 9 carreaux au total d'où une impossibilité.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
   À quelle condition sur n peut-on réaliser un pavage avec ces briques ?
   Il faut que n soit être un nombre pair.
3. Déterminer le nombre de pavages d'une grille de largeur 2 carreaux et de hauteur 3 carreaux. Il y a 3 pavages possibles :
   
4. À l'aide des grilles données en **annexe C**, **à rendre avec la copie**, dessiner tous les pavages pour $n = 4$.
   Cf annexe (il y a 11 pavages car $P(k+1) = 4P(k) - P(k-1)$ avec $n = 2k$)

Annexe - Pavages en or - À rendre avec la copie

Annexe A2 (Partie A)



Annexe C (Partie C)