Exercice 1 : L'ALGORITHME DE KAPREKAR

Définitions et exemples

Notations

Un nombre entier non nul à p chiffres est noté $n = a_{p-1} \dots a_1 a_0$ où a_0 est le chiffre des unités, a_1 le chiffre des dizaines, etc. et $a_{p-1} \neq 0$. n se décompose en base 10 sous la forme

$$n = a_{p-1} \dots a_1 a_0 = a_{p-1} \times 10^{p-1} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0.$$

Exemple : $n = 506 = 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 6$ (habituellement noté 506).

Définitions

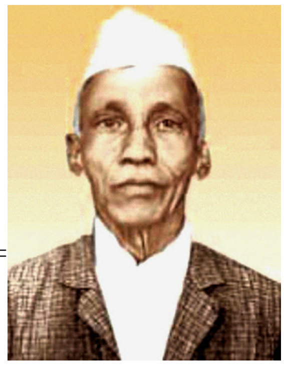
Étant donné un entier naturel n non nul, $c(n)$ est le nombre construit en ordonnant les chiffres du nombre n dans l'ordre croissant. $d(n)$ est le nombre construit en ordonnant les chiffres du nombre n dans l'ordre décroissant.

Exemple : $c(506) = 056 = 56$ et $d(506) = 650$

On considère la fonction K définie sur $\mathbb{N}^*$ par $K(n) = d(n) - c(n)$.

Exemple : $K(506) = d(506) - c(506) = 650 - 56 = 594$

Procédé détaillant l'algorithme de Kaprekar



Ramachandra Kaprekar est un mathématicien indien (1905-1988).
L'algorithme de Kaprekar consiste à répéter l'application de la fonction K :

$$n \mapsto K(n) = n_1 \mapsto K(n_1) = n_2 \mapsto K(n_2) = n_3 \mapsto \dots$$

L'algorithme s'arrête s'il aboutit à 0 ou à un nombre n_k non nul tel que $n_k = K(n_k)$. Une telle valeur n_k est appelée point fixe de l'algorithme de Kaprekar.

Exemple

En partant du nombre $n = 5294$, on obtient $n_1 = K(5294) = 9542-2459 = 7083$. En réappliquant la fonction K on obtient : $n_2 = K(7083) = 8730 - 0378 = 8352$. Puis $n_3 = K(8352) = 8631 - 1368 = 7263$ etc. On peut noter : $5294 \mapsto K(5294) = 7083 \mapsto K(7083) = 8352 \mapsto K(8352) = 7263 \mapsto \dots$

Questions préliminaires

Q1 : Justifier que 2 nombres dont les chiffres sont les mêmes à l'ordre près (comme 623 et 236 par exemple) possèdent la même image par la fonction de Kaprekar. Dans certaines questions de ce sujet on pourra donc indifféremment calculer l'image par K de n ou de $d(n)$.

Q2 : Combien d'étapes sont nécessaires pour que l'algorithme de Kaprekar s'arrête si on l'applique à un nombre entier compris entre 1 et 9 ?

Partie I Entiers naturels à deux chiffres : entre 10 et 99

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à deux chiffres.

Q3 : Appliquer l'algorithme de Kaprekar à 53.

Q4 : Choisir un entier naturel à deux chiffres distincts et lui appliquer l'algorithme de Kaprekar.

Questions 5 : Étude de l'arrêt de l'algorithme

Q5-a : Montrer que pour tout entier naturel n à deux chiffres la première étape de l'algorithme aboutit à un nombre $n_1 = K(n)$ multiple de 9.

Q5-b : À quels entiers naturels à deux chiffres peut-on réduire l'étude de l'arrêt de l'algorithme de Kaprekar ?

Q5-c : Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête toujours lorsqu'on l'applique à un entier naturel à deux chiffres.

Partie II Entiers naturels à trois chiffres : entre 100 et 999

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à trois chiffres.

Q6 : Choisir un entier naturel à trois chiffres et lui appliquer l'algorithme de Kaprekar. S'arrête-t-il sur un point fixe ?

Q7 : Soit $n = abc$ un nombre à trois chiffres. D'après la remarque de la question Q1, on considère $a \geq b \geq c$. Montrer que $n_1 = K(n) = 99a - c$ avec $0 \leq a - c \leq 9$. En déduire que : $n_1 = 0$ ou $n_1 = 99$ ou n_1 est à trois chiffres.

Questions 8 : Étude de l'arrêt de l'algorithme lorsque $n_1 = 0$

Q8-a : Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ces cas.

Q8-b : Déterminer la liste des entiers $n = abc$ avec $a \geq b \geq c$ pour lesquels $n_1 = K(n) = 0$.

Questions 9 : Étude de l'arrêt de l'algorithme lorsque $n_1 = 99$

Q9-a : Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ce cas.

Q9-b : Déterminer la liste des entiers $n = abc$ avec $a \geq b \geq c$ pour lesquels $n_1 = K(n) = 99$.

Questions 10 : Étude de l'arrêt de l'algorithme lorsque n_1 s'écrit avec trois chiffres

Q10-a : Quelles sont les valeurs de n_1 possibles qui s'écrivent avec trois chiffres ?

Q10-b : Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête dans ces cas.

Questions 11 : Cas d'arrêt de l'algorithme pour les entiers naturels à trois chiffres

Q11-a : Montrer que l'algorithme de Kaprekar s'arrête pour tout entier naturel à 3 chiffres.

Q11-b : Quand on leur applique l'algorithme de Kaprekar combien d'entiers naturels à trois chiffres ont 0 pour valeur d'arrêt ? Combien s'arrêtent sur un point fixe ? Quel(s) point(s) fixe(s) ?

Partie III Entiers naturels à quatre chiffres : entre 1000 et 9999

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'algorithme de Kaprekar et son éventuel arrêt pour les nombres à quatre chiffres. On considère maintenant un entier à quatre chiffres $n = abcd$. D'après la remarque de la question Q1, on peut supposer que $a \geq b \geq c \geq d$.

Q12 : Montrer que l'on a l'inégalité $0 \leq b - c \leq a - d$.

Q13 : Montrer que $n_1 = K(n) = 999a - d + 90b - c$.

Q14 : Justifier que n_1 est multiple de 9.

Dans les questions suivantes, l'action de l'algorithme de Kaprekar est étudiée en distinguant ces entiers à quatre chiffres selon les valeurs des différences $a-d$ et $b-c$.

Questions 15 : On suppose que $a-d=0$

Q15-a : Que vaut $n_1 = K(n)$ dans ce(s) cas ?

Q15-b : Quels sont les nombres n à quatre chiffres concernés par la condition $a-d=0$?

Questions 16 : On suppose que $a-d=1$

Q16-a : Déterminer les deux valeurs possibles pour $n_1 = K(n)$.

Q16-b : Appliquer l'algorithme de Kaprekar à ces deux valeurs.

Q16-c : Quels sont les nombres à quatre chiffres pour lesquels $n_1 = K(n) = 999$?

Questions 17 : On suppose que $a-d \geq 2$

On considère le tableau en ANNEXE 1 qui fait apparaître les différentes valeurs possibles de $n_1 = K(n)$.

Q17-a : Justifier la présence de cases «impossibles» dans le tableau notées X.

Q17-b : Compléter le tableau.

Questions 18 : L'arbre de Kaprekar

Dans l'arbre de Kaprekar (en annexe) les nombres sont remplacés par leurs versions «ordonnées décroissantes» :

- chaque flèche représente l'application de la fonction K
- dans chaque case, comme l'algorithme de Kaprekar est insensible à l'ordre des chiffres d'un nombre donné, on écrit $d(n)$ pour représenter tous les entiers n ayant les mêmes chiffres à l'ordre près.

Q18-a : Écrire en version «ordonnée décroissante» toutes les possibilités de $n_1 = K(n)$ à quatre chiffres. En dresser la liste dans l'ordre croissant.

Q18-b : Sur la feuille annexe, compléter l'arbre de Kaprekar où certaines des valeurs de $n_1 = K(n)$ ont été positionnées.

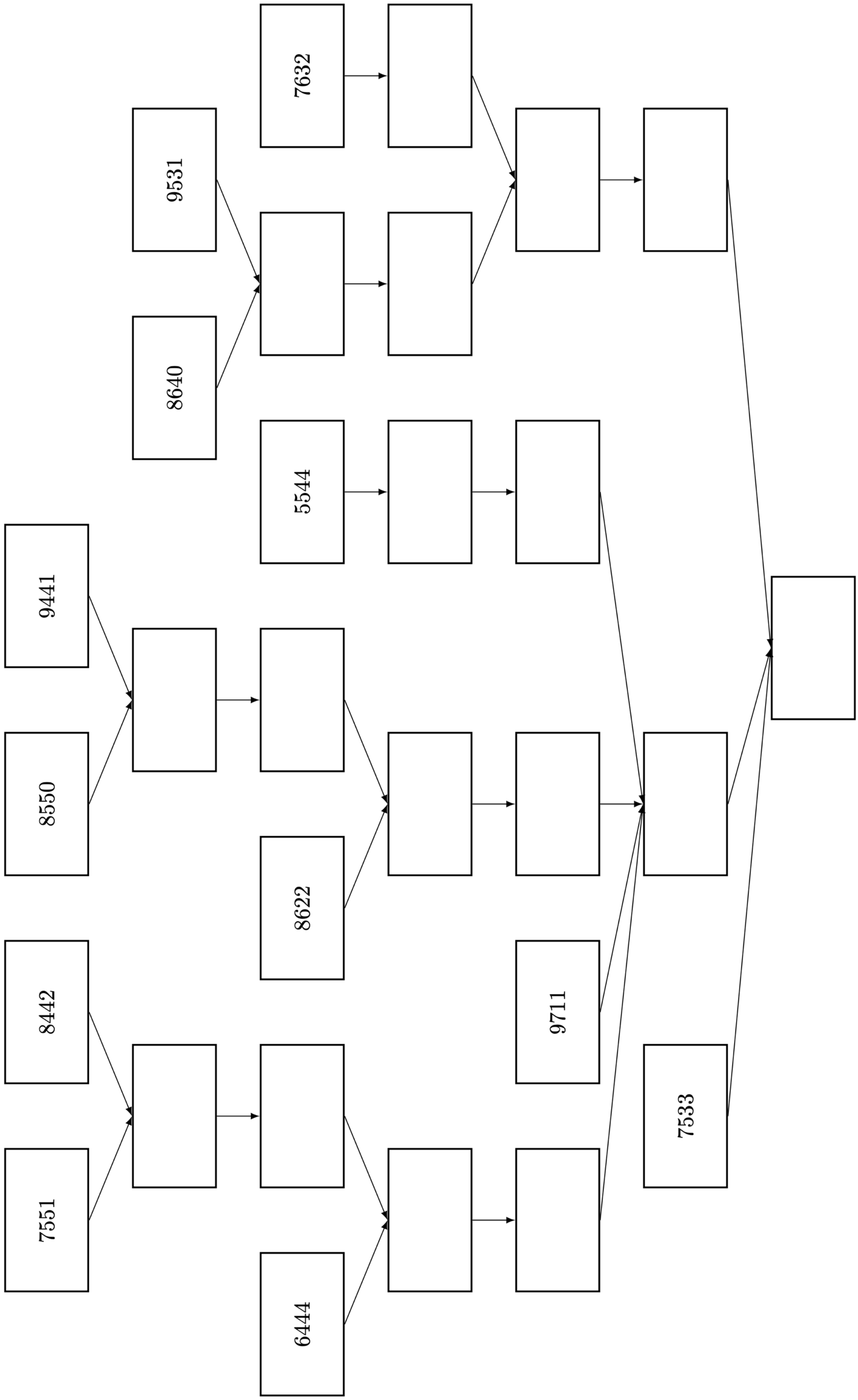
Q18-c : Appliquer l'algorithme de Kaprekar au dernier nombre au bas de l'arbre de Kaprekar.

Q19 : Quels sont le(s) point(s) fixe(s) possible(s) de l'algorithme de Kaprekar pour les nombres à quatre chiffres ? Combien de nombres à quatre chiffres aboutissent à 0 ? Combien aboutissent à chacun de ce(s) point(s) fixe(s) ?

ANNEXE 1

$b-c$ \ $a-d$	2	3	4	5	6	7	8	9
0								
1								
2							8172	
3	X					7263	8262	
4	X	X						
5	X	X	X					
6	X	X	X	X				
7	X	X	X	X	X			
8	X	X	X	X	X	X		
9	X	X	X	X	X	X	X	

ANNEXE 2

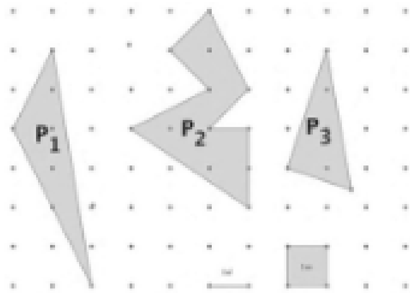


Exercice 2 : Polygones de PICK

Polygones de PICK

Dans tout le problème :

- On note une unité de longueur 1 u.l et une unité d'aire 1 u.a.
- On travaille dans un réseau pointé à maille carrée de côté 1.
- On appelle polygone de PICK un polygone non aplati construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau.
- On note i le nombre de points du réseau strictement intérieurs à ce polygone et b le nombre de points du réseau sur le bord du polygone.
- On note A l'aire du polygone de PICK.



Dans la figure ci-contre, les polygones P_1 et P_2 sont des polygones de PICK et le polygone P_3 ne l'est pas.

Pour le polygone P_1, on a $i = 3$ et $b = 4$; pour le polygone P_2, on a $i = 3$ et $b = 9$.

Partie I : Étude de quelques polygones de PICK

Questions 1 : le cas d'un rectangle de PICK

Q 1-a : Pour le rectangle de PICK de la figure 1 ci-contre, déterminer i, b et A.

Q 1-b : Calculer $i + \dfrac{b}{2} - 1$. Que constate-t-on ?

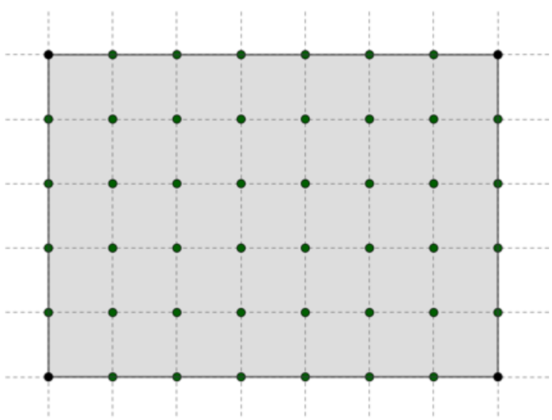


Figure 1: Figure 1 questions 1

Questions 2 : le cas des rectangles de PICK

Soit $ABCD$ un rectangle de PICK de dimensions quelconques dont les côtés sont parallèles au réseau (comme dans la figure 2 ci-contre). On note L sa longueur et l sa largeur. Soient b_R le nombre de points sur les bords du rectangle $ABCD$ et i_R le nombre de ses points strictement intérieurs.

Q 2-a : Exprimer en fonction de L le nombre de points sur le côté $[AD]$ extrémités comprises ?

Q 2-b : Exprimer b_R et i_R en fonction de L et l.

Q 2-c : En déduire que l'aire A_R du rectangle vérifie $A_R = i_R + \dfrac{b_R}{2} - 1$.

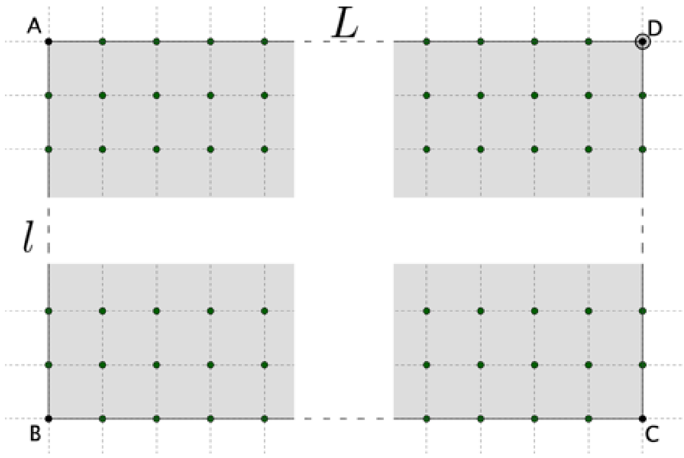


Figure 2: Figure 2 questions 2

Questions 3 : le cas d'un triangle rectangle de PICK

Q 3-a : Pour le triangle de PICK ABC rectangle en C ci-contre, déterminer i, b et A.

Q 3-b : Sur cet exemple, vérifier que l'on a $A = i + \dfrac{b}{2} - 1$.

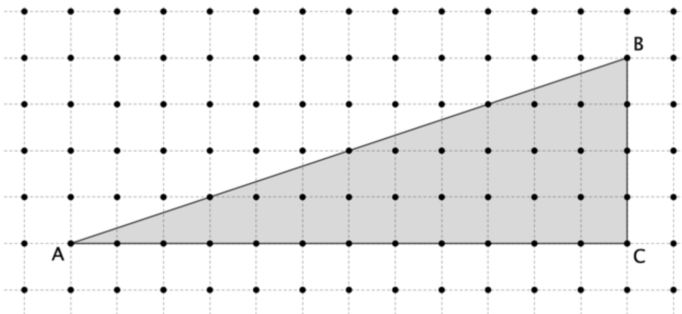


Figure 3: Figure 3 questions 3

Questions 4 : le cas des triangles rectangles de PICK

On considère le triangle rectangle de PICK ABC de la figure 2 tracé sur la figure 4. Soient b_T le nombre de points sur les bords du triangle rectangle ABC, i_T le nombre de ses points strictement intérieurs et k le nombre de points du réseau sur le segment $[AC]$ exceptés les points A et C.

Q 4-a : Justifier que $b_R = 2b_T - 2 - 2k$.

Q 4-b : Justifier que $i_R = 2i_T + k$.

Q 4-c : En déduire que l'aire A_T du triangle rectangle ABC vérifie $A_T = i_T + \dfrac{b_T}{2} - 1$.

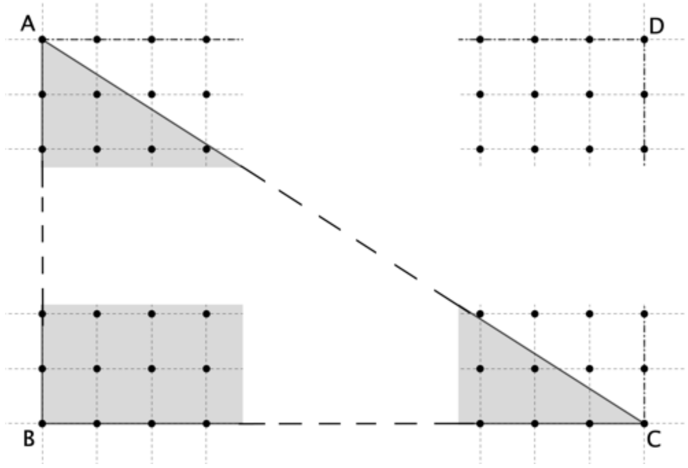


Figure 4: Figure 4 questions 4

Questions 5 : le cas de points intérieurs alignés dans un polygone de PICK

Q 5-a : Pour la figure de l'annexe 1, déterminer i, b et A.

Q 5-b : Vérifier que l'on a encore $A = i + \dfrac{b}{2} - 1$.

Q 5-c : Sur l'annexe 2, tracer un polygone de PICK avec $i = 4$ et $b = 3$.

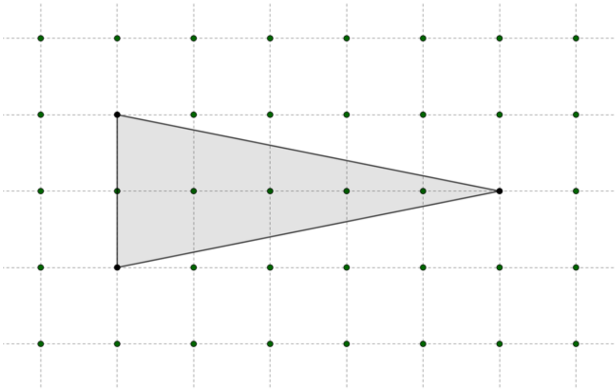
On appelle formule de PICK la relation $A = i + \dfrac{b}{2} - 1$.

Partie II : formule de PICK pour un polygone de PICK quelconque

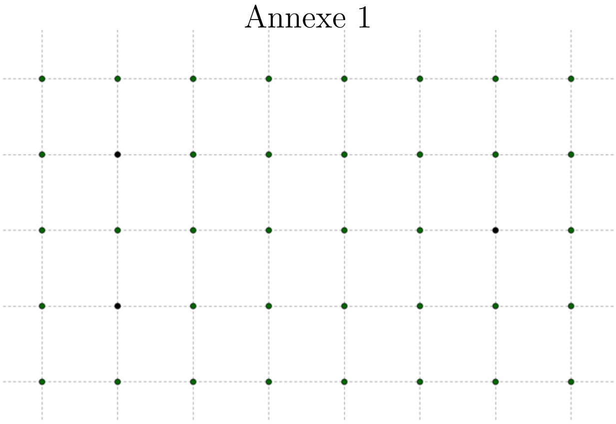
On admet que la formule de PICK reste valide pour un polygone de PICK quelconque.

Q 6 : Déterminer l'aire du polygone de PICK en annexe 3.

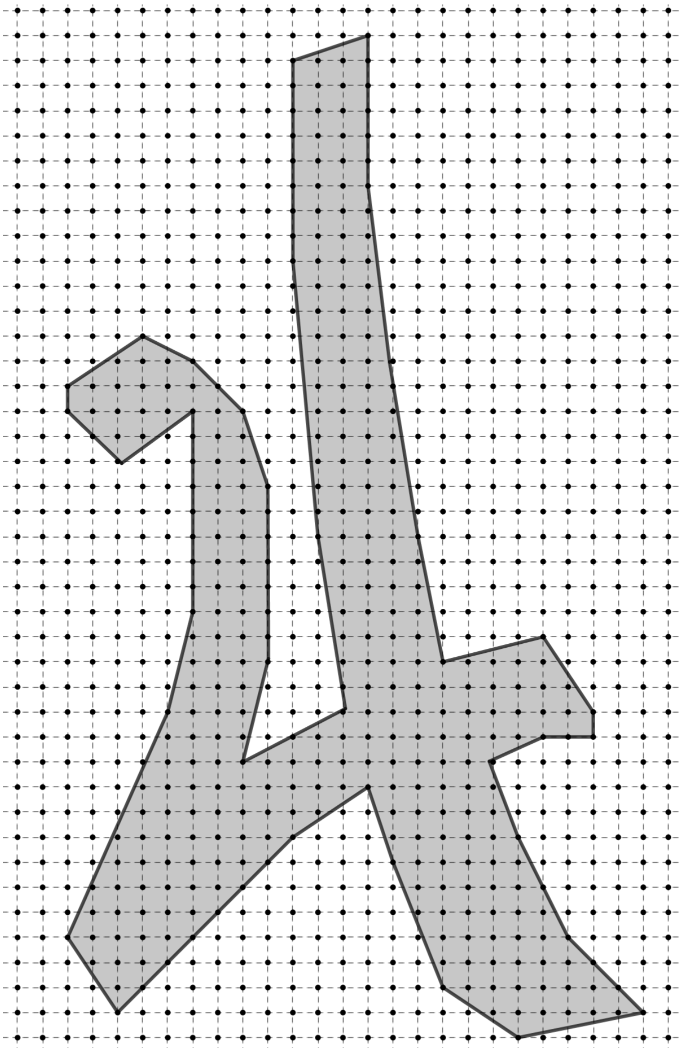
Annexes



Annexe 1



Annexe 2



Annexe 3
Polygone de PICK proche du logo de la candidature de Paris aux J.O. de 2024