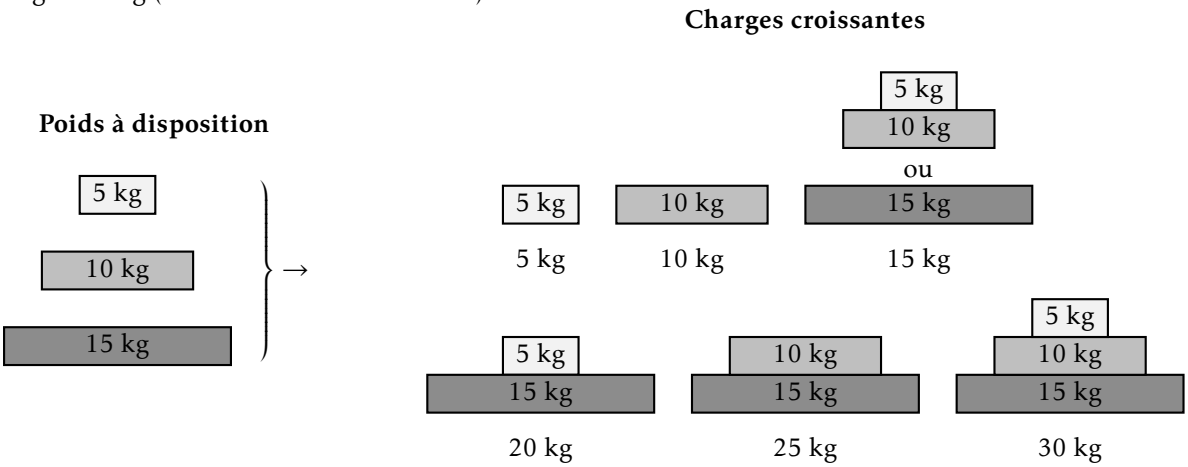
Exercice 1. Un programme musclé

Un sportif décide de suivre un programme de musculation.
Il souhaite acheter des disques en acier, de poids tous différents, qu'il pourra ensuite empiler afin de les soulever progressivement et de façon croissante.

On appelle **charge** la somme des poids à soulever au fur et à mesure des empilements de disques.

Exemple :
Si le sportif achète un disque de 5 kg, un disque de 10 kg et un disque de 15 kg pour son programme de musculation, il pourra alors soulever successivement et de façon croissante les charges de 5 kg ; 10 kg ; 15 kg ; 20 kg ; 25 kg et 30 kg (voir illustration ci-dessous).



Notations :

- (5 ; 10 ; 15) est la **liste des poids** à disposition dans l'ordre croissant,
- [5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 30] est la **liste des charges croissantes** du programme de musculation.
  Remarque : Si une charge peut être obtenue de plusieurs façons (comme la charge de 15kg dans l'exemple donné), elle ne sera notée qu'une fois dans le programme de musculation.
- (5 ; 10 ; 15) → [5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 30] est **la correspondance entre la liste des poids et la liste des charges** du programme de musculation,
- On appelle **pas** entre deux charges consécutives C_1 et C_2 la différence $C_2 - C_1$,
- Si tous les pas d'une liste de charges sont égaux, le programme de musculation est dit **régulier** sinon il est dit **irrégulier**.

Ainsi avec les notations précédentes :

(5 ; 10 ; 15) → [5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 30], le programme de musculation est régulier de pas égaux à 5.
(1 ; 3 ; 4) → [1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8], les pas sont successivement égaux à 2 , 1 , 1 , 2 , 1 : le programme de musculation est donc irrégulier, avec un pas minimum de 1 et un pas maximum de 2.

Partie 1 : Premiers exemples

Pour chacune des listes de poids ci-dessous, déterminer si le programme de musculation correspondant est régulier en précisant la valeur des pas constants, ou s'il est irrégulier en précisant la valeur du pas minimum et la valeur du pas maximum.

Q1 : a. (10 ; 15 ; 20) b. (1 ; 2 ; 3) c. (2 ; 4 ; 6) d. (3 ; 5 ; 7)

Partie 2 : Poids entiers consécutifs et poids entiers pairs

Q2 : La liste de poids (1 ; 2 ; 3 ; 4) permet-elle un programme de musculation régulier ? Justifier.

Q3 : Pour tout entier naturel non nul n, on note (1 ; 2 ; 3 ; … ; n) la liste des poids entiers compris entre 1 et n.

(a) Si le sportif n'utilise qu'un seul disque à la fois, quelle est la liste des charges correspondantes ?

(b) Montrer qu'en utilisant deux disques, il est possible de former toutes les charges entières comprises entre $(n+1)$ et $(2n-1)$.

(c) Montrer qu'en utilisant trois disques, il est possible de former toutes les charges entières comprises entre $2n$ et $(3n-3)$.

(d) On note $S = 1 + 2 + \cdots + n$ la somme de tous les poids.

Montrer que le programme de musculation associé à la liste des poids $(1\,;2\,;3\,;\ldots\,;n)$ est formé de toutes les charges entières comprises entre 1 et S (et donc régulier de pas constants égaux à 1).

Q4 : Soit la liste des poids pairs $(2\,;4\,;\ldots\,;2n)$: le programme de musculation est-il régulier ? Justifier.

Partie 3 : Poids entiers impairs

Q5 : Pour chacune des listes de poids ci-dessous, déterminer si le programme est régulier ou s'il est irrégulier.

a. $(1\,;3)$ b. $(1\,;3\,;5)$ c. $(1\,;3\,;5\,;7)$

Q6 : Plus généralement, soit n un entier impair supérieur ou égal à 3.

On note $(1\,;3\,;5\,;\ldots\,;n)$ la liste des poids impairs compris entre 1 et n, et on pose $T = 1 + 3 + 5 + \cdots + n$.

Montrer que les charges 2 et $(T-2)$ ne font pas partie du programme de musculation.

(Remarque : il est possible de montrer que 2 et $(T-2)$ sont les seules charges entières comprises entre 1 et T ne faisant pas partie du programme musculation, mais il n'est pas demandé dans cette question de montrer que ce sont bien les seules).

Partie 4 : Programmes de musculation réguliers utilisant deux ou trois disques

Le sportif décide d'acheter trois disques distincts au maximum pour son programme de musculation, donc soit deux poids $(a\,;b)$ avec $a < b$, soit trois poids $(a\,;b\,;c)$ avec $a < b < c$; a, b, c étant des réels strictement positifs.

Q7 : Montrer que les listes de deux poids distincts $(a\,;b)$ permettant un programme de musculation régulier sont celles de la forme $(a\,;2a)$ (autrement dit celles telles que $b = 2a$).

Q8 : Déterminer les listes de trois poids distincts $(a\,;b\,;c)$ permettant un programme de musculation régulier.

(Le candidat pourra distinguer les cas où $c = a + b$, puis $c > a + b$ puis $c < a + b$)

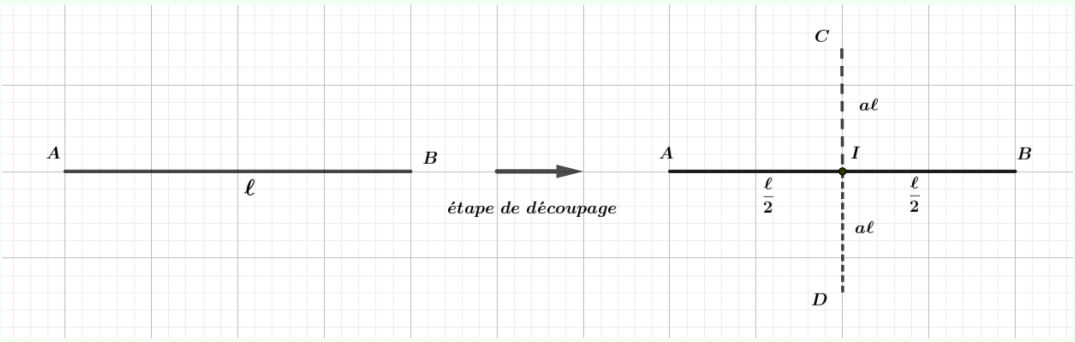
Exercice 2. Fractales

Cet exercice a pour but de réaliser une figure géométrique obtenue en répétant une même construction géométrique simple. La figure obtenue est appelée une fractale.

Définition de l'étape de découpage

Soit a un réel positif vérifiant $0 < a < \dfrac{1}{2}$.
Pour **chacun** des segments horizontaux ou verticaux de la figure, on crée 4 nouveaux segments plus petits en procédant de la manière suivante :

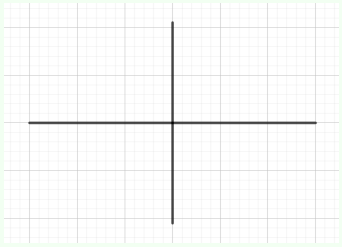
- on considère un segment [AB] de longueur ℓ,
- on coupe ce segment en son milieu noté I et l'on crée ainsi 2 nouveaux segments [AI] et [IB] de longueur $\dfrac{\ell}{2}$,
- sur la médiatrice de ce segment, on crée 2 nouveaux segments [CI] et [ID] de longueur $a\ell$.



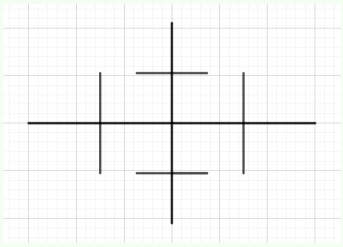
Définition d'une fractale de rang *n*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 0.
On considère un segment de départ horizontal de longueur L > 0.
Une fractale de rang *n* notée F_n est la figure obtenue en réitérant n fois l'étape de découpage.
Ainsi F_0 est simplement le segment de départ.
Voici les trois premières fractales pour un segment de départ de longueur L = 6 avec $a = 0,35$:

F_0 comporte 1 segment



F_1 comporte 4 segments :
2 horizontaux et 2 verticaux



F_2 comporte 16 segments :
8 horizontaux et 8 verticaux

On considère un segment de départ de longueur L = 48 avec $a = \frac{1}{4}$.

Partie 1 : Des constructions et des longueurs

Q1 : Sur l'annexe 1, les deux premières fractales F_0 et F_1 sont tracées.

a) Compléter la fractale F_2.

b) Compléter la fractale F_3 dont une grande partie des segments sont déjà tracés.

On décide de ranger les différents segments par taille : la taille 0 représente les plus grands segments, la taille 1 représente les segments plus petits.

On peut classer les 4 segments de F_1 dans le tableau suivant :

taille	0	1
longueurs	24	12
nombre de segments	2	2

.

Q1 : a) Quelles sont les 3 longueurs possibles pour les 16 segments de la fractale F_2 ?

b) Recopier et compléter le tableau suivant permettant de classer des plus grands aux plus petits les segments de la fractale F_2 :

taille	0	1	2
longueurs			
nombre de segments			

.

Partie 2 : Les différents segments

Soit $n \geqslant 0$.

Nous allons compter le nombre de segments de la fractale F_n qui sont de même longueur.

Les différentes longueurs sont classées de manière décroissante par la taille qui varie de 0 (les segments les plus grands) jusqu'à n (les segments les plus petits).

Le triangle des segments :

On construit un tableau triangulaire.
Chaque ligne de ce tableau permet de compter pour la fractale F_n, le nombre de segments ayant la taille p, p étant un entier compris entre 0 à n.

Le nombre situé à la ligne n et à la colonne p est noté $S(n, p)$.
Par exemple, $S(2, 1)$ représente le nombre de segments de la fractale F_2 dont la taille n'est ni la plus grande, ni la plus petite.

n \ p	0	1	2	3	…
0	1				
1	2	2			
2	…	…	…		
3	…	…	…	…	
⋮	⋮				

Q1 : a) Justifier rapidement que $S(0, 0) = 1$ et $S(1, 0) = S(1, 1) = 2$.

b) En annexe 2, compléter le tableau pour les lignes $n = 1$ à $n = 3$.

Q2 : Justifier que $S(n, 0) = S(n, n) = 2^n$.

Q3 : On admet pour $p < n$ la relation suivante :

$$S(n + 1, p + 1) = 2 \times (S(n, p) + S(n, p + 1))$$

Compléter le tableau de l'annexe 2 jusqu'à la ligne $n = 5$.

Partie 3 : Les différentes longueurs

Le triangle des longueurs :

On construit un second tableau triangulaire.
Chaque ligne de ce tableau permet d'indiquer pour la fractale F_n, la longueur des segments selon leur taille p, p étant un entier compris entre 0 à n.

Le nombre situé à la ligne n et à la colonne p est noté $L(n, p)$.
Par exemple, $L(2, 1)$ est la longueur des segments de la fractale F_2 ayant une taille égale à 1.

n \ p	0	1	2	3	…
0	48				
1	24	12			
2	…	…	…		
3	…	…	…	…	
⋮	⋮				

Q1 : a) Justifier que $L(0, 0) = 48$ et $L(1, 0) = 24$ et $L(1, 1) = 12$.
b) En annexe 3, compléter le triangle des longueurs pour les lignes $n = 1$ à $n = 3$.

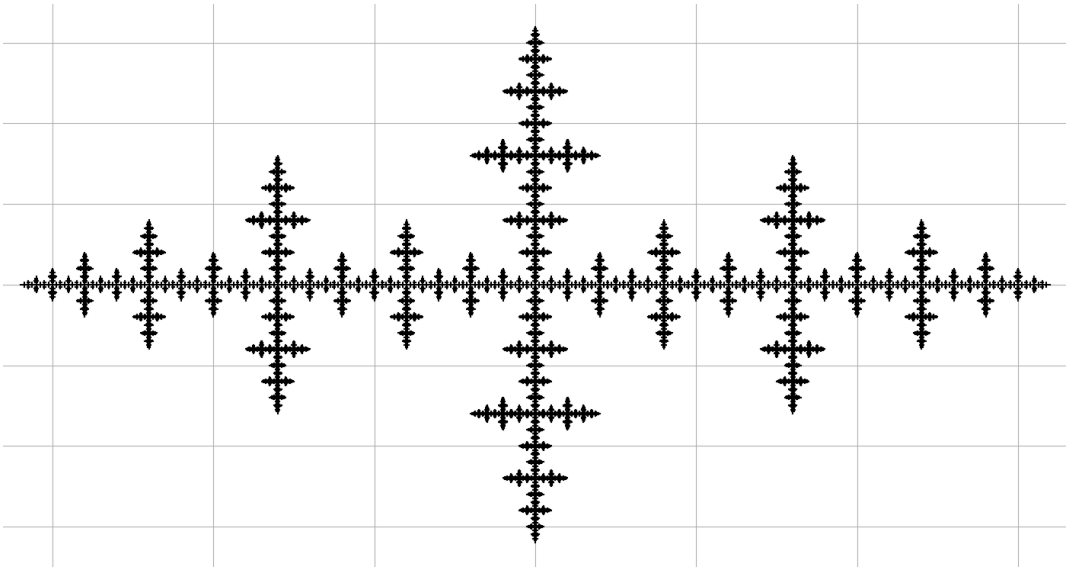
Q2 : Justifier que $L(n, 0) = \dfrac{48}{2^n}$.

Q3 : a) Justifier que la ligne $n + 1$ du tableau comporte une taille de plus que la ligne n.
b) En déduire la relation $L(n + 1, p + 1) = \dfrac{1}{4}L(n, p)$.
c) Compléter le tableau de l'annexe 3 jusqu'à la ligne $n = 5$ en arrondissant à 0,0001 près si besoin.

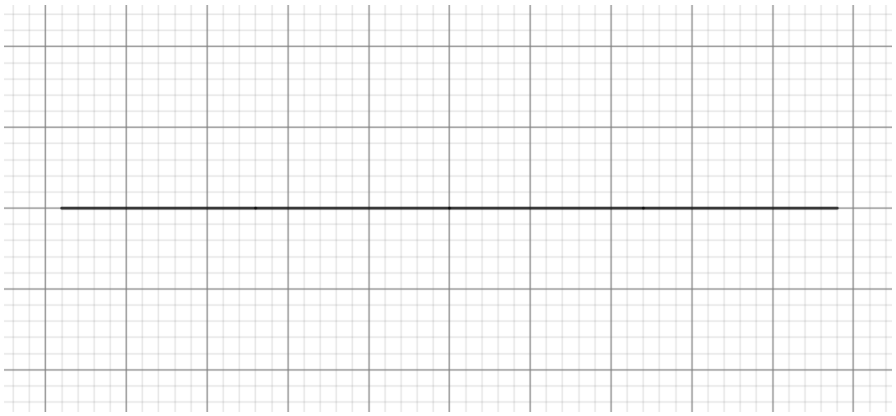
Partie 4 : De l'infini dans du fini

Q1 : a) Justifier que la somme des longueurs des segments est multipliée par $\dfrac{3}{2}$ à chaque étape de découpage.
b) Le segment de départ a pour longueur 48 mm.
Quelle est la somme des longueurs des segments de la fractale F_8 exprimée en cm ?
c) À partir de quelle valeur de n, la somme des longueurs des segments de F_n dépassera la distance Terre-Jupiter qui vaut environ 591 millions de kilomètres ?

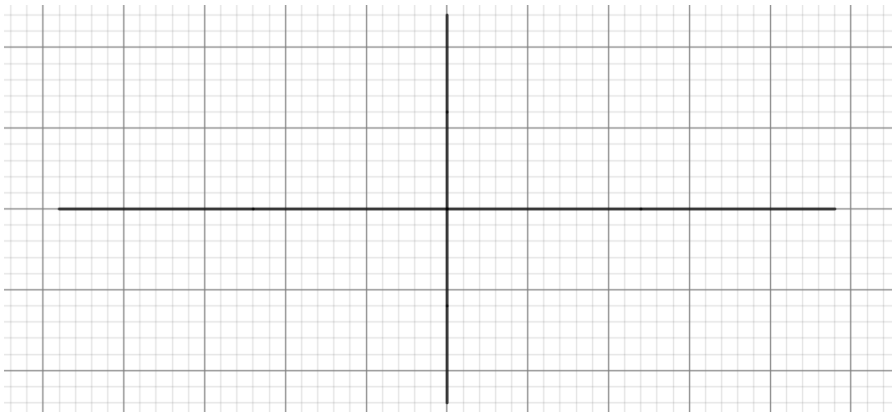
Voici pour illustrer le sujet la fractale F_8 :



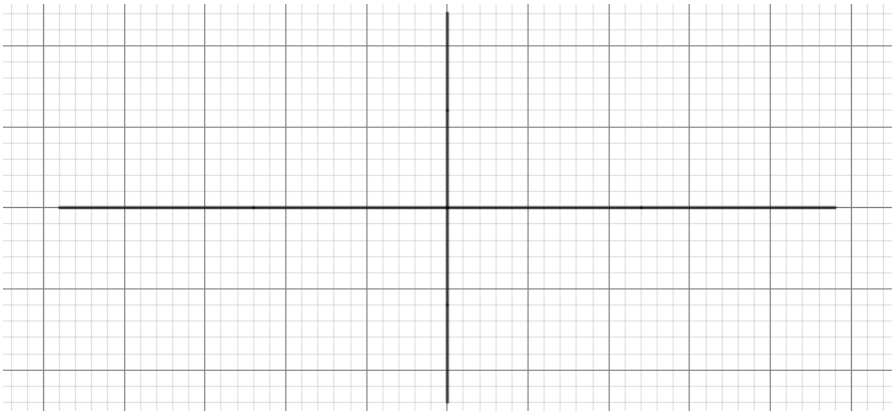
Annexe 1



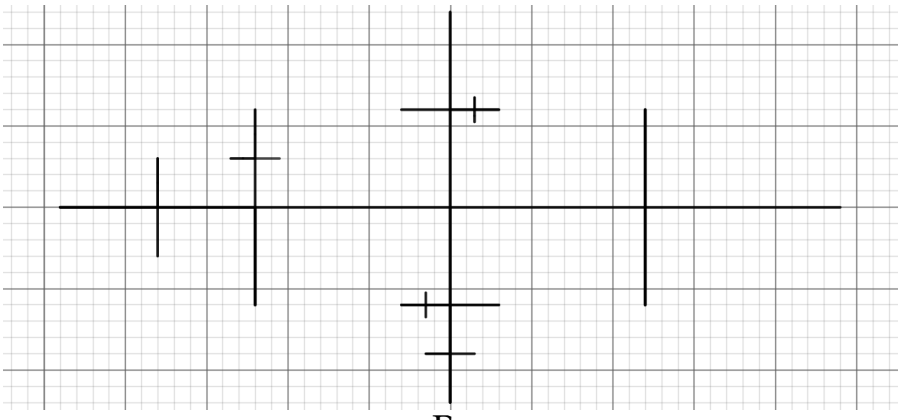
F_0



F_1



F_2



F_3

Annexe 2 : Le triangle des segments

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	2	2				
2	…	…	…			
3	…	…	24	…		
4	…	64	…	…	…	
5	…	…	…	…	…	…

Annexe 3 : Le triangle des longueurs

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	48					
1	24	12				
2	…	…	…			
3	…	…	1,5	…		
4	…	1,5	…	…	…	
5	…	…	…	…	…	…

Exercice 3. Organiser un tournoi fermé !

Dans tout l'exercice, on considère un entier naturel non nul n **pair**.
Sacha doit organiser une compétition avec n participants qui sont numérotés de 1 à n.

Pour i et j des entiers naturels compris entre 1 et n et $i < j$, on définit et on note par le couple (i, j) un **match** entre le participant i et le participant j.

Par exemple, pour $n = 4$ participants, tous les matchs possibles sont $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ et $(3, 4)$.
On peut représenter ces six matchs sous la forme d'un tableau :

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 1$	✕	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$
$i = 2$	✕	✕	$(2, 3)$	$(2, 4)$
$i = 3$	✕	✕	✕	$(3, 4)$

Q1 : Dans cette question, on considère une compétition avec $n = 6$ participants.

(a) Compléter le tableau de l'**annexe** (**à rendre avec la copie**) afin de lister tous les matchs possibles. On barrera les cases inutiles de ce tableau.

(b) Combien a-t-on de matchs possibles pour $n = 6$ participants ?

Q2 : Dans cette question, on revient au cas général avec n participants.
En remarquant que l'on représente les matchs à l'aide d'un tableau, constitué de n colonnes et de $n - 1$ lignes, dont on barre la moitié des cases, montrer que l'on a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ matchs possibles au total.

- On appelle **série** un ensemble de $\dfrac{n}{2}$ matchs tel que tous les participants de la compétition jouent et ne jouent qu'un seul match.
- On appelle **tournoi** la liste ordonnée des $n - 1$ séries, que l'on numérote de 1 à $n - 1$, telle que chaque participant n'affronte jamais deux fois un même adversaire.

Voici un exemple de tournoi pour $n = 4$ participants que l'on a représenté sous la forme d'un tableau :

Série 1	$(1,2)$	$(3,4)$
Série 2	$(1,3)$	$(2,4)$
Série 3	$(1,4)$	$(2,3)$

On remarque alors que :

- chaque participant n'affronte jamais deux fois le même adversaire ;
- l'ordre des matchs dans une même série n'a pas d'importance.

Q3 : Combien peut-on organiser de tournois différents avec $n = 4$ participants ?

Q4 : Compléter le tableau de l'**annexe** (**à rendre avec la copie**) pour obtenir un exemple de tournoi avec $n = 6$ participants.

Q5 : Dans cette question, on considère un tournoi avec $n = 6$ participants.
On notera par exemple $(1,5),(3,4),(2,6)$ une série.

(a) Combien a-t-on de séries possibles telles que les participants 1 et 2 se rencontrent ? Les citer.

(b) On suppose que la première série est la série $(1,2),(3,4),(5,6)$. Combien a-t-on alors de secondes séries possibles telles que les participants 1 et 3 s'affrontent ? On rappelle qu'un participant ne peut pas affronter deux fois le même adversaire.

(c) On suppose que la première série est $(1,2),(3,4),(5,6)$, que la seconde série est $(1,3),(2,6),(4,5)$ et qu'à la troisième série les participants 1 et 4 se rencontrent. Démontrer qu'il n'y a qu'une seule troisième série possible que l'on donnera.

(d) En déduire un exemple de tournoi où à la série n°i, le participant 1 rencontre le participant $i+1$, on complètera le tableau correspondant de l'**annexe** (**à rendre avec la copie**) .

(e) Combien a-t-on de tournois possibles où à la série n°i, le participant 1 rencontre le participant $i+1$?

(f) Combien peut-on organiser de tournois différents ?

Q6 : On considère l'algorithme suivant afin de construire un tournoi avec n participants.
Soit le match (i,j) avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$:

- Si $j < n$ et $i + j - 1 < n$ alors les participants i et j s'affronteront à la série $i + j - 1$.
- Si $j < n$ et $i + j - 1 \geqslant n$ alors les participants i et j s'affronteront à la série $i + j - n$.
- Si $j = n$ et $2i \leqslant n$ alors les participants i et j s'affronteront à la ronde $2i - 1$.
- Si $j = n$ et $2i > n$ alors les participants i et j s'affronteront à la ronde $2i - n$.

Compléter le tableau de l'**annexe** (**à rendre avec la copie**) correspondant au tournoi obtenu à l'aide de cet algorithme pour $n = 6$ participants.

Question 1.(a)

	$j = 1$					
$i = 1$	X					

Question 4

Série 1	(1, 2)	(3, 4)	
Série 2	(1, 3)	(2, 5)	
Série 3	(1, 4)		
Série 4	(1, 5)		
Série 5	(1, 6)		

Question 5.(d)

Série 1	(1, 2)	(3, 4)	
Série 2	(1, 3)	(2, 6)	
Série 3			
Série 4			
Série 5			

Question 6

Série 1			
Série 2			
Série 3			
Série 4			
Série 5			

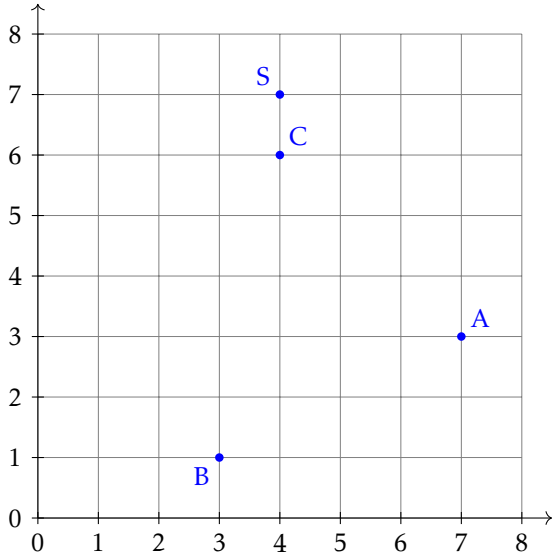
Exercice 4. De ville en ville

Le problème du voyageur : soit n un nombre entier, supérieur ou égal à 3.
Un voyageur doit visiter une et une seule fois n villes et revenir à son point d'origine.
Le problème est de trouver l'ordre de visite des villes qui **minimise la distance totale parcourue** par le voyageur. Le trajet obtenu sera alors appelé **trajet optimal**.

L'objectif de cet exercice est d'étudier deux stratégies pour résoudre ce problème.

Partie 1 : premier exemple avec 3 villes à visiter.

On suppose, dans cette partie, que $n = 3$.
Le voyageur de commerce doit, à partir de S (siège de son entreprise) visiter les 3 villes suivantes A, B et C dont on connaît les coordonnées, dans un repère orthonormé d'unité 1 km, puis revenir en S.
Voici les coordonnées des villes A, B et C et du siège S de son entreprise : A(7; 3), B(3; 1), C(4, 6) et S(4, 7).



On rappelle les deux résultats suivants :

- Dans un repère orthonormé, si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Pour tout entier naturel n non nul, on a $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Un exemple de trajet est S puis A, puis B, puis C et enfin retour à S, que l'on notera SABCS.
On remarquera que les trajets SABCS et SCBAS ont la même longueur.

Q1 : Citer tous les trajets de longueurs différentes.

Q2 : On considère le trajet SABCS. Déterminer sa longueur et donner une valeur approchée au mètre près.

Partie 2 : cas de 4 villes et plus

Q3 : Supposons maintenant qu'il y a 4 villes à visiter au lieu de 3.
Combien y a-t-il alors, au maximum, de trajets de longueurs différentes ?

Q4 : On admet le résultat suivant : s'il y a n villes à visiter ($n \geqslant 2$) alors il y a : $\dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times 2}{2}$ calculs de distance entre deux points à effectuer.
Supposons qu'on ait un ordinateur assez rapide pour calculer la distance entre deux points en 10^{-8} secondes.
Si le voyageur avait 15 villes à visiter, combien de temps (en heures-minutes) faudrait-il à cet ordinateur pour déterminer le trajet le plus court ? (On suppose que seul le temps correspondant au calcul de distance est significatif pour obtenir la réponse).

Q5 : Que doit-on penser de cette stratégie consistant à calculer tous les trajets possibles ?

Partie 3 : étude d'une autre stratégie

Stratégie : le voyageur décide, à chaque étape, de choisir la ville qui lui est la plus proche.

L'objectif de cette partie est d'étudier cette nouvelle stratégie.

Q6 : Revenons maintenant à notre problème initial (partie 1) avec l'entreprise S et les trois villes A, B et C.

- **(a)** Calculer la distance entre S et chacune des trois autres villes, afin de déterminer le point le plus proche de S. On donnera une valeur approchée au mètre près.
- **(b)** Poursuivre alors les différentes étapes de la stratégie afin de déterminer le trajet obtenu.
- **(c)** Combien de calculs de distance entre deux points doit-on effectuer afin d'obtenir ce trajet à l'aide de cette stratégie ? On note ce nombre D_3.
- **(d)** i. Donner alors la longueur de ce trajet au mètre près (ne pas oublier qu'on revient à S).
  ii. A-t-on obtenu le trajet optimal ?

Q7 : On considère maintenant qu'il y a 4 villes à visiter. On note alors D_4 le nombre de calculs de distance nécessaires afin de déterminer le trajet obtenu par cette stratégie. Justifier que $D_4 = 9$.

Q8 : Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On suppose qu'il y a n villes à visiter.
Montrer alors que $D_n = \dfrac{n(n+1)}{2} - 1$.

Q9 : En reprenant l'ordinateur de la partie 2, s'il y avait 15 villes à visiter, calculer le temps mis par l'ordinateur pour déterminer le trajet donné par cette stratégie.

Q10 : Au vu des résultats obtenus dans cette partie, donner un avantage et un inconvénient à l'utilisation de cette stratégie par le voyageur.

Exercice 5. Partage convivial

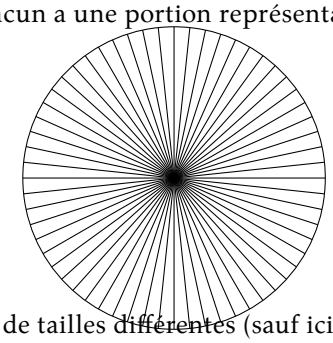
Partie 1 : premier exemple

Pour son anniversaire, Roger a préparé un gâteau. Il a invité des amis, mais il ne sait pas si, au final, ils seront 4, 5 ou 6 convives autour de la table. Pourtant, il décide de couper par avance son gâteau afin que chacun puisse en avoir autant que les autres, qu'ils soient 4, 5 ou 6 convives, et qu'il ne reste plus de gâteau.

Le gâteau est un **disque**.
On appelle **part** un morceau du gâteau situé entre deux coupes successives, et les parts sont coupées **suivant des rayons**. La **taille** d'une part est une fraction de gâteau.
On appelle **portion** la quantité de gâteau que reçoit un convive. Une portion est constituée d'un certain nombre de parts.
On appelle **partage convivial**, un partage du gâteau en parts qui, une fois effectué, permet de donner la même portion à chaque convive qu'ils soient $n-1$, n ou $n+1$ (n entier naturel $n \geqslant 2$).

Dans cette partie, on a 4, 5 ou 6 convives donc $n = 5$.
Si 4 convives sont présents, chacun aura une portion représentant $\dfrac{1}{4}$ de gâteau, si 5 convives sont présents, chacun aura une portion représentant $\dfrac{1}{5}$ de gâteau et si 6 convives sont présents, chacun a une portion représentant $\dfrac{1}{6}$ de gâteau.

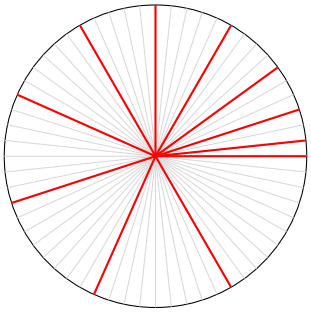
Q1 : **1re stratégie** : Roger décide de couper son gâteau en 60 parts de tailles égales à $\dfrac{1}{60}$. Montrer que le partage est convivial, en **recopiant** et complétant le tableau suivant :



Nombre de convives	4	5	6
Nombre de parts de gâteau dans chaque portion			

Q2 : **2e stratégie** : Roger propose de couper son gâteau en seulement 11 parts de tailles différentes (sauf ici pour 2 parts). Les rayons rouges, sur la figure suivante, représentent les découpes. On a laissé apparaître les parts de la première stratégie qui ne seront pas découpées ici.
Voici les tailles des 11 parts :
$\dfrac{10}{60}$ $\dfrac{9}{60}$ $\dfrac{8}{60}$ $\dfrac{7}{60}$ $\dfrac{6}{60}$ $\dfrac{5}{60}$ $\dfrac{5}{60}$ $\dfrac{4}{60}$ $\dfrac{3}{60}$ $\dfrac{2}{60}$ $\dfrac{1}{60}$.

(a) Cas où le nombre de convives est 4 :



Roger donne au premier convive les parts de tailles $\dfrac{10}{60}$ et $\dfrac{5}{60}$ et au deuxième les parts de tailles $\dfrac{9}{60}$ et $\dfrac{6}{60}$.

i. Montrer que ces parts permettent à ces deux convives d'avoir la même portion de gâteau ;
ii. Répartir les autres parts aux deux autres convives afin qu'ils mangent la même portion de gâteau.

(b) Cas où le nombre de convives est 5 : faire une distribution des 11 parts pour chaque convive, afin qu'ils mangent la même portion de gâteau.

(c) Cas où le nombre de convives est 6 : faire une distribution des 11 parts pour chaque convive, afin qu'ils mangent la même portion de gâteau.

(d) Le partage en ces 11 parts est-il convivial ?

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, notons u_n le **nombre minimal de parts d'un partage convivial** entre $n-1$, n ou $n+1$ convives.

Remarque : d'après la partie 1, on a $u_5 \leqslant 11$. En effet, on a trouvé un partage convivial du gâteau en 11 parts pour 4, 5 ou 6 convives mais on ne peut pas affirmer que $u_5 = 11$, c'est-à-dire que 11 soit le minimum de parts pour ce partage convivial.

Partie 2 : cas $n = 2$ et $n = 3$

Q3 : Le cas $n = 2$.

(a) Donner la signification de u_2.

(b) Justifier que $u_2 \geqslant 3$.

(c) On suppose ici avoir trouvé un partage convivial en 3 parts.

i. Quelle est alors la taille de chaque part lorsque les convives sont 3 ?

ii. Ce partage convient-il lorsque les convives ne sont que 2 ?

On en conclut donc que $u_2 \geqslant 4$.

(d) Donner un partage convivial du gâteau en 4 parts (sous forme de figure ou fractions).

(e) En déduire u_2.

Q4 : Le cas $n = 3$. Dans cette question, on va montrer que $u_3 = 6$.

(a) Prouver que $u_3 \geqslant 5$.

(b) On suppose dans cette question qu'il existe un partage convivial en 5 parts entre 2, 3 ou 4 convives.

i. Quand les convives sont 4, prouver qu'un convive a une part de plus que les autres (indépendamment de leurs tailles).

ii. Quelle est la taille des parts des 3 autres convives ?

iii. Trouver alors une contradiction avec le cas où les convives ne sont que 3.

iv. En déduire que $u_3 \geqslant 6$.

(c) Donner un partage convivial en 6 parts dont les tailles sont exprimées en fractions de dénominateurs égaux à 12 et donner la répartition entre les convives dans chaque cas.

Partie 3 : vers une généralisation

Dans cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Q5 : Prouver que $u_n \geqslant n + 1$.

Q6 : **(a)** Supposons qu'il y ait n convives et qu'un convive n'ait qu'une seule part.
Cette part peut-elle convenir lorsqu'il y a $n + 1$ convives ?

(b) En déduire que $u_n \geqslant 2n$.

Q7 : En considérant les polygones réguliers à $n - 1$, n et $n + 1$ côtés, prouver que $u_n \leqslant 3n - 2$.

Q8 : En déduire un encadrement de u_n.

Exercice 6. Gamme musicale

Partie 1 : Construction des octaves

On introduit la notion d'octave :

Etant donnée une fréquence $f_0 \in]0, +\infty[$,

- La fréquence $f_1 = 2f_0$ est dite "une octave au-dessus" de f_0 lorsqu'on monte d'une octave, de f_0 à f_1.
- La fréquence f_0 est dite "une octave en dessous" de f_1 lorsqu'on descend d'une octave, de f_1 à f_0.

L'intervalle $[f_0, 2f_0]$ est un *intervalle de référence*.

Q1 : Compléter, dans l'annexe 1, le tableau des octaves successives en dessous et au-dessus de la fréquence $f_0 = 440$.

Q2 : Compléter l'axe gradué, dans l'annexe 2, en y représentant les valeurs 110 et 880.

Q3 : **(a)** Soit un entier $n \in \mathbb{N}$, justifier que la n-ième octave au-dessus de $f_0 = 440$, notée f_n^+ vérifie :

$$f_n^+ = 2^n f_0.$$

Proposer de même une formule pour la n-ème octave en dessous de f_0, notée f_n^-.

(b) Calculer l'écart $f_{n+1}^+ - f_n^+$ entre deux octaves successives. Est-il constant ?

Partie 2 : Construction des quintes

On définit aussi la notion de quinte :

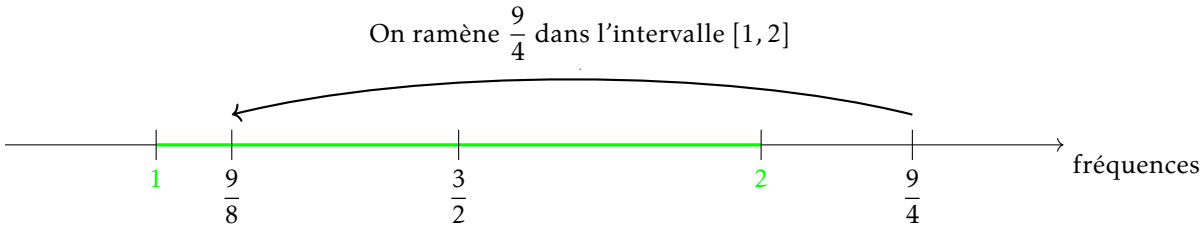
> Etant donnée une fréquence $f_0 \in]0, +\infty[$, on définit la "quinte au-dessus de f_0" comme la fréquence $q_1 = \frac{3}{2} f_0$.
> La fréquence f_0 est alors "une quinte en dessous de q_1".

Q4 : Si $q_1 = \frac{3}{2} f_0$, exprimer f_0 en fonction de q_1.

Pour des raisons de simplicité, dans les questions qui suivent, on fixe $f_0 = 1$. L'intervalle de référence associé est alors l'intervalle $[1, 2]$.

On calcule les quintes successives, de la forme $(\frac{3}{2})^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, et on les ramène dans l'intervalle $[1, 2]$ en descendant le bon nombre d'octaves. Par exemple :

- Pour la première quinte, $n = 1$, la fréquence $\frac{3}{2}$ est déjà dans l'intervalle $[1, 2]$: inutile de changer d'octave.
- Pour la deuxième quinte, $n = 2$, la fréquence $(\frac{3}{2})^2$ vaut $\frac{9}{4} = 2,25$, elle n'est pas dans l'intervalle $[1, 2]$. On l'y ramène en descendant d'une octave, puisque $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4} = \frac{9}{8} \in [1, 2]$:



Q5 : Compléter, dans l'annexe 3, le tableau des quintes successives, ramenées dans l'intervalle de référence $[1, 2]$, en descendant du bon nombre d'octaves.

Q6 : On reprend le calcul des quintes effectuées à la question précédente. On observe que les valeurs trouvées ne sont pas dans l'ordre croissant.
Compléter le tableau, dans l'annexe 4, afin d'ordonner les quintes successives dans l'ordre croissant.

Q7 : Une gamme est un ensemble fini de fréquences dans l'intervalle de référence $[1, 2]$. Il est standard de s'arrêter à 12 quintes (ramenées dans l'intervalle $[1, 2]$), et de considérer que la 12-ème quinte correspond à 7 octaves ce qui se traduit mathématiquement par l'égalité :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 2^7.$$

En s'aidant de la calculette, commenter cette égalité.

Q8 : De manière plus générale, supposons que n quintes donnent la même fréquence que p octaves, pour deux entiers $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on aurait alors

$$3^n = 2^{n+p}.$$

Conclure à une absurdité.

Partie 3 : Couper un intervalle en deux

On souhaite couper un intervalle de référence en parties équilibrées, mais au sens de la multiplication.

> Etant donnés deux réels positifs a et b, on définit leur *moyenne géométrique* c comme le réel positif vérifiant
>
> $$\frac{c}{a} = \frac{b}{c}.$$

Q9 : Montrer que c vérifie $c = \sqrt{ab}$.

Q10 : Etant donnée une fréquence $f_0 > 0$, exprimer la moyenne géométrique de l'intervalle $[f_0, 2f_0]$ en fonction de f_0.

Q11 : **(a)** Justifier que le milieu de l'intervalle $[f_0, 2f_0]$ est égal à la première quinte au-dessus de f_0.

(b) Comparer cette valeur avec la moyenne géométrique de l'intervalle $[f_0, 2f_0]$ trouvée ci-dessus.

Annexe

Annexe 1

Numéro de l'octave au-dessus ou au-dessous de f_0	1	2	3	4
Fréquence de l'octave au-dessus correspondante	880			
Fréquence de l'octave au-dessous correspondante	220			

Annexe 2



Annexe 3

Numéro n de la quinte	1	2	3	4	5	6
Fréquence de la n-ième quinte	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$			
Fréquence ramenée dans l'intervalle $[1, 2]$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$			
Valeur approchée à 10^{-2}	1,5	1,13	1,69			

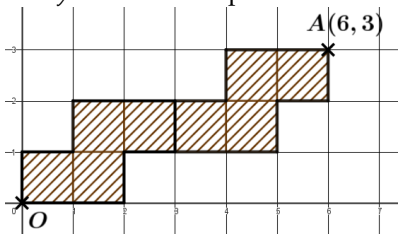
Annexe 4

Numéro n de la quinte ordonnée	2	4				
Valeur approchée à 10^{-2}	1,13					

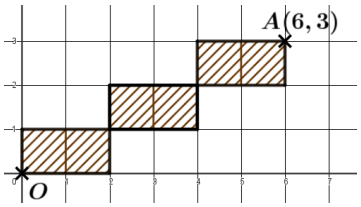
Exercice 7. Segments pixellisés

L'objectif de cet exercice est de représenter un segment sur un écran d'ordinateur ou de smartphone à l'aide de pixels.
Les pixels sont des carrés formant un quadrillage régulier que l'on peut munir d'un repère orthonormé.

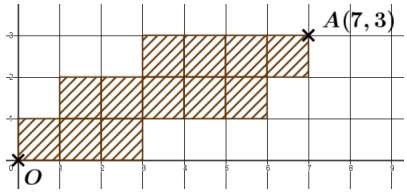
Voici trois manières de représenter un segment reliant l'origine du repère à un point A de coordonnées (x, y) avec x et y deux entiers positifs non nuls.



Exemple 1



Exemple 2



Exemple 3

Les exemples 1 et 2 semblent les plus pertinents à étudier.

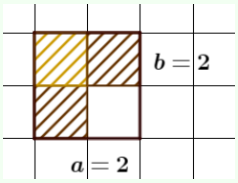
Partie 1 - Les motifs

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Dans le quadrillage régulier, on considère un rectangle possédant $\boldsymbol{a}$ carrés de large et $\boldsymbol{b}$ carrés de haut.

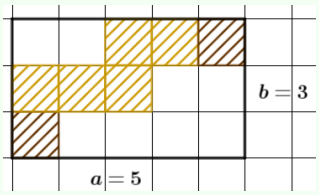
Définition d'un motif
Un motif est un ensemble de pixels que l'on lit de gauche à droite vérifiant les conditions suivantes :

- Son premier pixel est appelé **pixel de départ** et est situé en bas à gauche du rectangle.
- À partir d'un pixel, le pixel suivant est un pixel situé à droite ou au-dessus, les deux pixels ayant un côté en commun.
- Son dernier pixel est appelé le **pixel de fin** et est le pixel situé en haut à droite du rectangle.

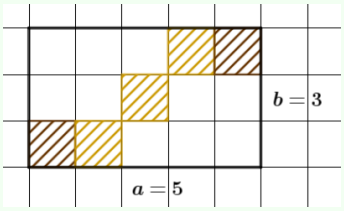
On appelle **taille du motif** le couple (a, b).



Motif de taille $(2, 2)$



Motif de taille $(5, 3)$

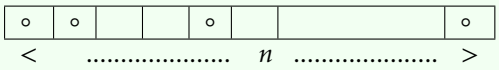


Cet exemple n'est pas un motif

Q1 : Sur l'**annexe 1**, hachurer

(a) les 2 motifs de taille $(2, 2)$,
(b) les 3 motifs de taille $(3, 2)$,
(c) les 10 motifs de taille $(4, 3)$.

Définition des combinaisons
Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geqslant 1$ et $p \leqslant n$.
On considère n cases vides comme sur le schéma ci-dessous dans lesquelles on place p jetons identiques avec au plus un jeton par case.



Le nombre de possibilités de placer les p jetons dans les n cases est appelé **combinaison de p parmi n** et est noté $\mathrm{C}(n, p)$.
La formule suivante permet de calculer ces nombres pour $p \geqslant 1$:

$$\mathrm{C}(n,p) = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots (n-p+1)}{p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times 1}$$

De plus, on pose $\mathrm{C}(n, 0) = 1$.
On remarquera qu'il y a le même nombre de facteurs au numérateur et au dénominateur.
Par exemple $\mathrm{C}(3,2) = \dfrac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$ et $\mathrm{C}(5,3) = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$.

Q1 : On considère un motif de taille (a, b).
On veut se déplacer du centre du pixel de départ au centre du pixel de fin en n'utilisant que deux déplacements : soit on se déplace de 1 vers la droite, soit on se déplace de 1 vers le haut.

(a) Justifier qu'il faut utiliser $a + b - 2$ déplacements pour joindre le centre du pixel de départ au centre du pixel de fin.

(b) En déduire qu'il y a $\mathrm{C}(a + b - 2\,,\, a - 1)$ motifs différents.

Q2 : Calculer le nombre de motifs de taille $(8, 12)$.

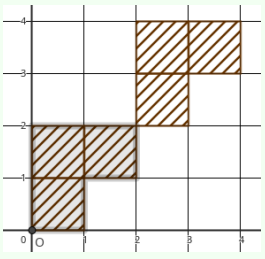
Partie 2 - Les segments pixellisés

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. Soient x et y deux entiers naturels non nuls.
On appelle O l'origine du repère et on note A le point de coordonnées (x, y).

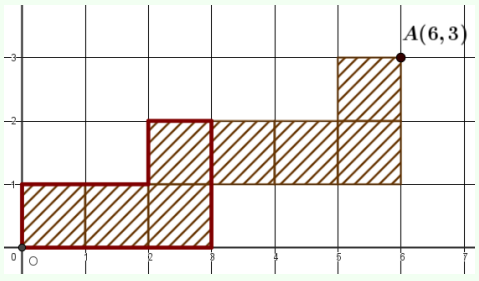
Définition d'un segment pixellisé
Un segment pixellisé reliant O à A est un ensemble de pixels formé par la répétition de gauche à droite d'un **même** motif tel que :

- Le premier motif a pour pixel de départ le pixel dont le sommet inférieur gauche est le point O.
- Pour deux motifs successifs, le pixel de départ du motif de droite est situé à droite en haut du pixel de fin du motif de gauche. Ainsi ces deux pixels n'ont qu'un sommet en commun.
- Le dernier motif a pour pixel de fin le pixel dont le sommet supérieur droit est le point A.

On note R le **nombre de répétitions** du motif.



Exemple de segment pixellisé avec un motif de taille $(2, 2)$ et $\mathrm{R} = 2$



Contre-exemple où le motif de taille $(3, 2)$ n'est pas répété correctement

Rappel sur les diviseurs communs
Soient m et n deux entiers naturels non nuls.
On appelle diviseur commun tout entier naturel qui est à la fois un diviseur de m et de n.

Q1 : **(a)** Justifier que R est un diviseur commun de x et de y.

(b) Quelle est alors la taille du motif ?

Q2 : On pose $(x, y) = (4, 8)$.

(a) Donner les trois possibilités de taille de motif.

(b) Sur l'**annexe 2.1**, tracer un segment discret pour chacune de ces possibilités.

Q3 : On pose $(x, y) = (12, 24)$.

(a) Donner les possibilités de taille de motif.

(b) Sur l'**annexe 2.2**, tracer un segment discret pour chacune de ces possibilités.

Partie 3 - Les segments pixellisés réguliers

On rappelle que pour un segment pixellisé, R désigne le nombre de répétitions de son motif de taille (a, b).
On cherche dans cette partie à rendre le tracé du segment le plus "droit" possible.

Rappel sur le pgcd
Soit m et n deux entiers naturels non nuls.
Parmi tous les diviseurs communs de m et n, il en existe un plus grand appelé le plus grand commun diviseur de m et de n. Celui-ci est noté $pgcd(m, n)$.
$pgcd(m, n)$ peut être égal à 1.

Définition d'un segment pixellisé régulier
On considère qu'un segment pixellisé est régulier si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

R est maximal et b est minimal.

Soient x et y deux entiers naturels non nuls.
On considère dans cette partie uniquement des segments pixellisés réguliers.

Q1 : Quelle est le motif d'un segment si $x = y$?

Q2 : Justifier que R $= pgcd(x, y)$.

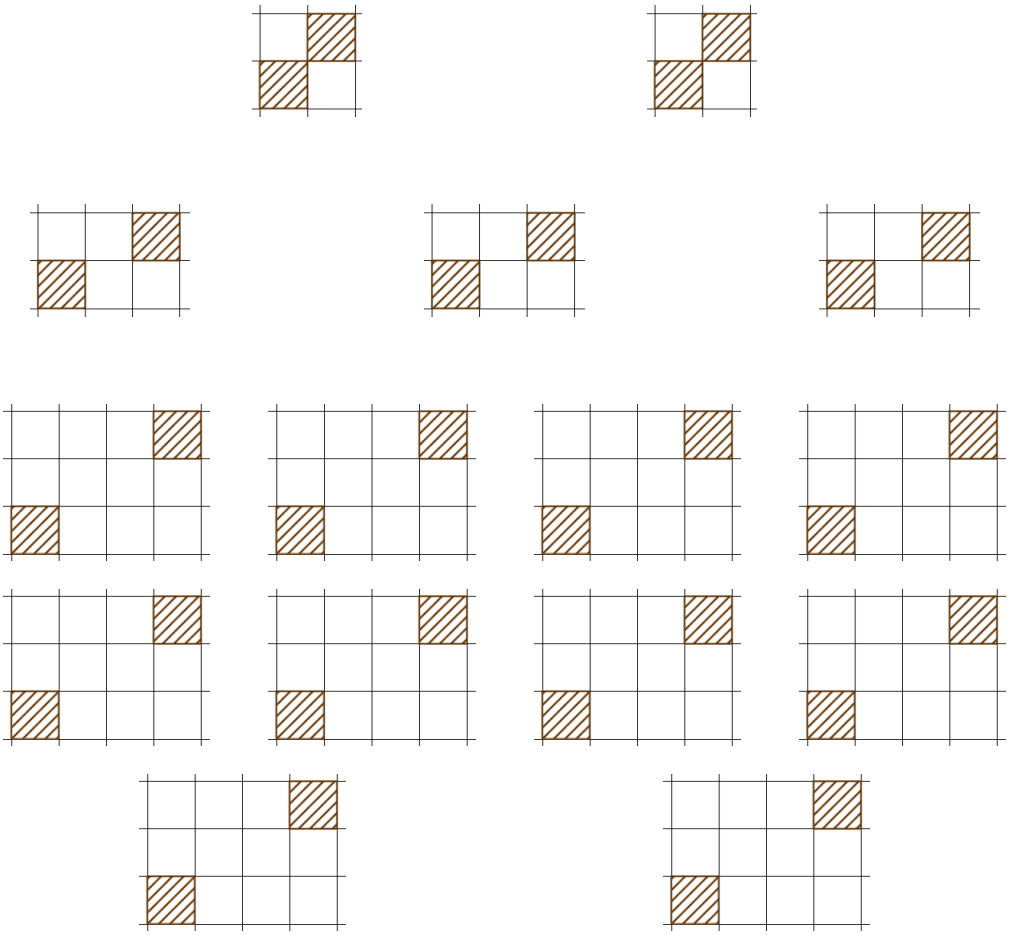
Q3 : On pose $(x, y) = (8, 12)$.

(a) Déterminer R et la taille du motif.

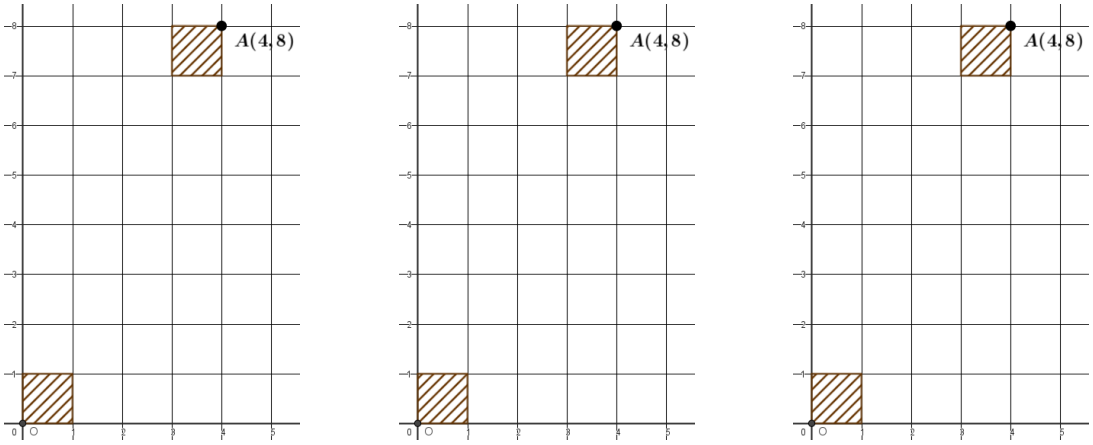
(b) Sur l'**annexe** 3, tracer deux exemples de segments

Q4 : Déterminer l'ensemble des couples (x, y) tel que R $= 4$ et $a = 5$.

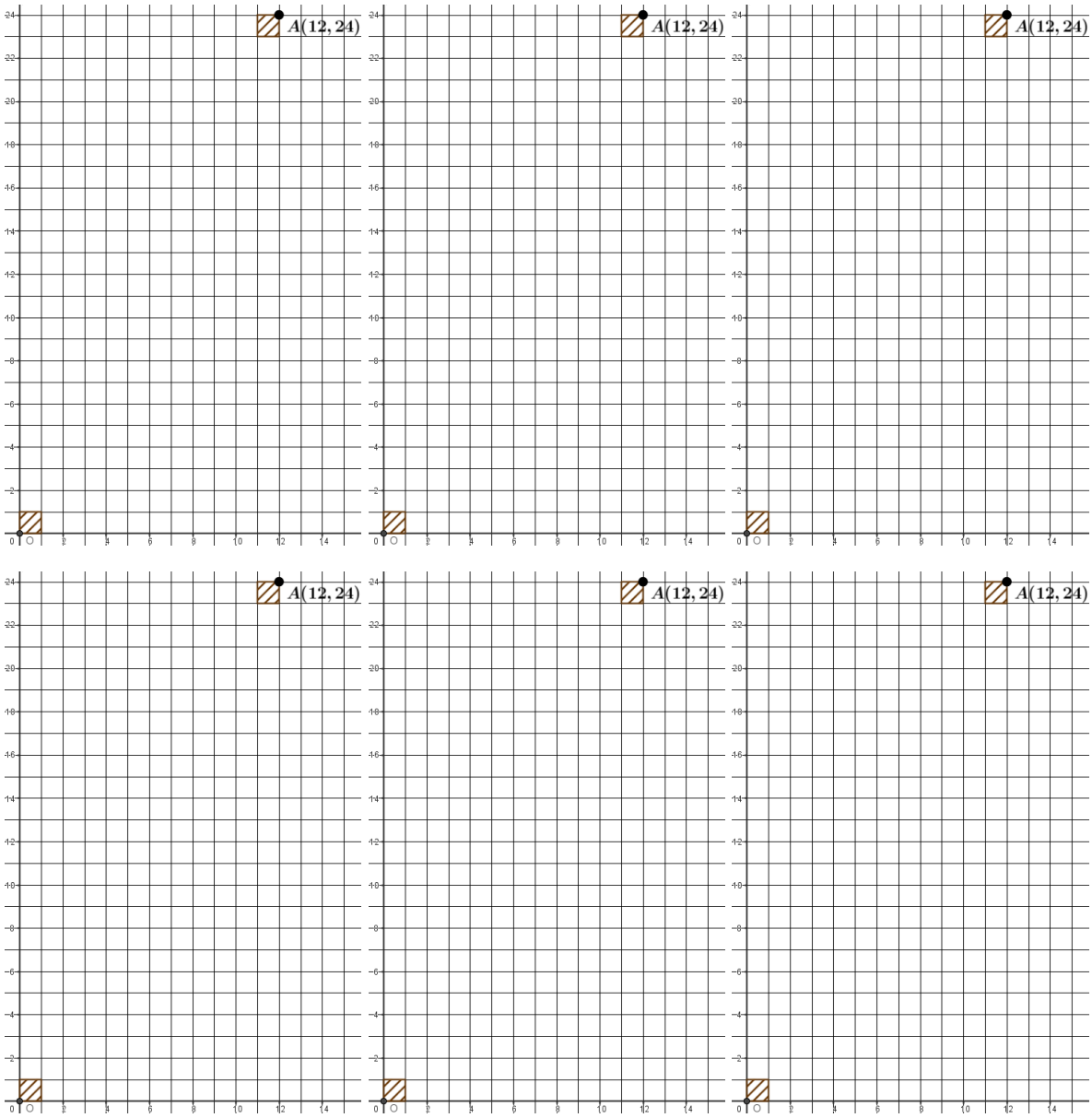
Annexe 1



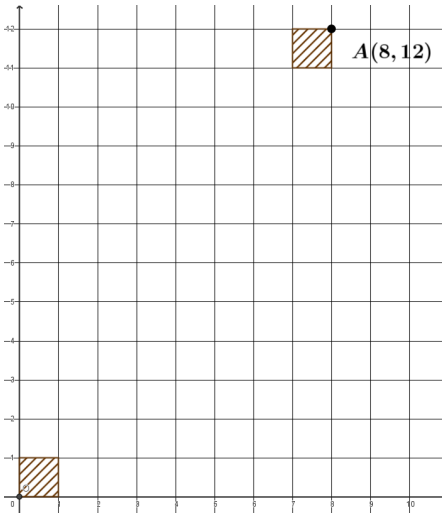
Annexe 2.1



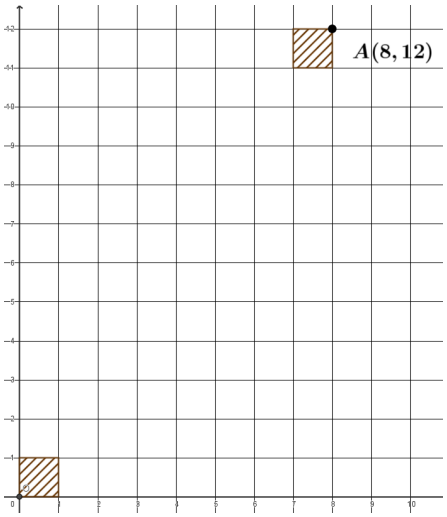
Annexe 2.2



Annexe 3



Exemple 1



Exemple 2

Corrigé de l'exercice 1 : Un programme musclé

Q1 : **(a)** (10 ; 15 ; 20) → [10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 30 ; 35 ; 45] donc irrégulier de pas minimum 5 et maximum 10.
(b) (1 ; 2 ; 3) → [1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6] donc régulier de pas 1.
(c) (2 ; 4 ; 6) → [2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12] donc régulier de pas 2.
(d) (3 ; 5 ; 7) → [3 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 12 ; 15] donc irrégulier de pas minimum 1 et maximum 3.

Q2 : (1 ; 2 ; 3 ; 4) → [1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10] donc régulier de pas 1.

Q3 : **(a)** En n'utilisant qu'un disque de la liste de poids (1 ; 2 ; 3 ; … ; n), les charges croissantes correspondantes sont les entiers de 1 à n (de façon triviale).
(b) Partant du disque de poids n, il suffit d'ajouter successivement pour 2ème poids les poids 1 ; 2 ; 3 ; … ; $(n-1)$ pour pouvoir obtenir toutes les charges entières de $(n+1)$ à $n+(n-1)=2n-1$
(c) Partant des deux disques de poids n et $(n-1)$ utilisés précédemment, il suffit ensuite d'ajouter successivement pour 3ème poids les poids 1 ; 2 ; … ; $(n-2)$ pour obtenir toutes les charges entières de $2n$ à $(2n-1)+(n-2)=3n-3$.
(d) On généralise le procédé : aux plus grands poids utilisés dans l'étape précédentes n ; $(n-1)$; $(n-2)$ etc. on ajoute un nouveau poids 1 ; 2 ; 3 ; … dans l'ordre croissant on obtient alors des sommes entières consécutives, jusqu'à la dernière étape où de proche en proche on a la somme de tous les poids 1 ; 2 ; 3 ; … ; n et donc jusqu'à obtenir S.
Le programme de musculation est donc bien formé de l'ensemble des entiers compris entre 1 et S.

Q4 : On passe de (1 ; 2 ; 3 ; … ; n) à (2 ; 4 ; 6 ; … ; $2n$) en multipliant tous les poids par deux, ce qui a pour effet de multiplier toutes les sommes obtenues (les charges) et les différences (les pas) par 2 : Le programme de musculation de (1 ; 2 ; 3 ; … ; n) étant régulier de pas 1, celui de (2 ; 4 ; 6 ; … ; $2n$) est donc aussi régulier de pas égaux à 2.

Q5 : **(a)** (1 ; 3) → [1 ; 3 ; 4] : irrégulier de pas minimum 1 et maximum 2 b. Par ajout de 5 aux sommes du a. : (1 ; 3 ; 5) → [1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9]
Programme irrégulier de pas minimum 1 et maximum 2. c. Par ajout de 7 aux sommes du b. : (1 ; 3 ; 5 ; 7) → [1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 15 ; 16]
Programme irrégulier de pas minimum 1 et maximum 2.

Q6 : Partant des poids (1 ; 3 ; 5 ; …) les charges minimales sont 1 puis 3 (puis 4 etc.) donc 2 ne figure pas dans les charges d'entraînement.
T s'obtient par l'ajout de tous les poids impairs $1+3+5+\cdots+n$, donc pour obtenir la somme (T − 2) il faudrait pouvoir retirer de la somme T un ou plusieurs entiers impairs dont la somme vaut 2 : ce qui est impossible d'après le point précédent donc (T − 2) ne figure pas non plus dans les charges d'entraînement.

Q7 : $0<a<b$ donc $(a\,;b)\to[a\,;b\,;a+b]$, régulier si et seulement si les pas sont égaux donc si et seulement si $b-a=(a+b)-b$ soit $b=2a$ d'où $(a\,;2a)$ (donnant $[a\,;2a\,;3a]$, programme régulier de pas égaux à a).

Q8 : Par disjonction de cas :

- Si $c=a+b$, on a $(a\,;b\,;a+b)\to[a\,;b\,;a+b\,;2a+b\,;a+2b\,;2a+2b]$
On doit avoir $b-a=(a+b)-b$ donc $b=2a$ d'où $c=a+b=3a$.
Et alors $(a\,;2a\,;3a)\to[a\,;2a\,;3a\,;4a\,;5a\,;6a]$, programme de musculation régulier de pas égaux à a.
- Si c > a + b on a : $(a\,;b\,;c)\to[a\,;b\,;a+b\,;c\,;c+a\,;c+b\,;c+a+b]$ Par différence, les pas sont égaux si et seulement si : pas= $b-a=(a+b)-b=c-(a+b)=(c+b)-(c+a)=(c+a+b)-(c+b)$ Ce qui donne pas= $b-a=a=c-(a+b)=b-a=a$. Et donc pas= $b-a=a=c-(a+b)$ Ce qui équivaut à $b=2aetc=(a+b)+a=4a$
D'où l'ensemble $(a\,;b\,;c)=(a\,;2a\,;4a)\to[a\,;2a\,;3a\,;4a\,;5a\,;6a\,;7a]$, programme de musculation régulier de pas égaux à a.
- Si $c<a+b$ soit $(a\,;b\,;c)$ on obtient par sommes l'entrainement croissant : $[a\,;b\,;c\,;a+b\,;a+c\,;b+c\,;a+b+c]$
Par différences, le pas sera constant si et seulement si : pas= $b-a=c-b=(a+b)-c=(a+c)-(a+b)=(b+c)-(a+c)=(a+b+c)-(b+c)$ Donc pas= $b-a=c-b=(a+b)-c=c-b=b-a=a$ Donc pas= $b-a=c-b=(a+b)-c=a$.
Ce qui implique $b=2a$ d'où pas= $a=c-2a=3a-c$. D'où $c=3a$ mais dans ce cas : $a=3a-c=0$ donc $a=0$: non
Donc pas de programme de musculation régulier si $c<a+b$

Conclusion : les listes de poids $(a\,;b\,;c)$ donnant des programmes de musculation réguliers sont les $(a\,;2a\,;3a)$ et $(a\,;2a\,;4a)$, a réel strictement positif.

Corrigé de l'exercice 2 : Fractales

Partie 1 : Des constructions et des longueurs

Q1 : a) cf annexe
b) cf annexe

Q2 : a) Les 3 longueurs sont : 12, 6 et 3

b)

taille	0	1	2
longueurs	12	6	3
nombre de segments	4	8	4

Partie 2 : Les différents segments

Q1 : a) La fractale F_0 est simplement le segment de départ donc $S(0,0) = 1$.
La fractale F_1 est obtenue après une étape de découpage donc elle comporte 4 segments : 2 grands donc $S(1,0) = 2$ de taille 0 et 2 petits donc $S(1,1) = 2$ de taille 1.
b) cf annexe

Q2 : On remarque qu'à chaque étape de découpage les plus grands segments de taille 0 sont coupés en deux moitiés ce qui donne des segments de taille 0 également. Donc leur nombre suit une suite géométrique de raison 2. Comme F_0 a un seul segment, on a $S(n,0) = 2^n$.
De la même façon la médiatrice des plus petits segments de taille p donne 2 segments encore plus petits de taille $p+1$. Comme F_0 a un seul segment, on a $S(n,n) = 2^n$.

Q3 : cf annexe

Partie 3 : Les différentes longueurs

Q1 : a) La fractale F_0 comporte un segment de longueur 48 donc $L(0,0) = 48$.
La fractale F_2 possède 2 tailles donc $L(1,0) = \dfrac{48}{2} = 24$ et $L(1,1) = \dfrac{48}{4} = 12$.
b) cf annexe

Q2 : La fractale F_n a ses plus grands segments de taille 0 coupés en 2 moitiés. Ces nouveaux segments sont de taille 0. La longueur des segments de taille 0 suit donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et comme le segment F_0 a une longueur égale à 48, on a $L(n,0) = \dfrac{48}{2^n}$.

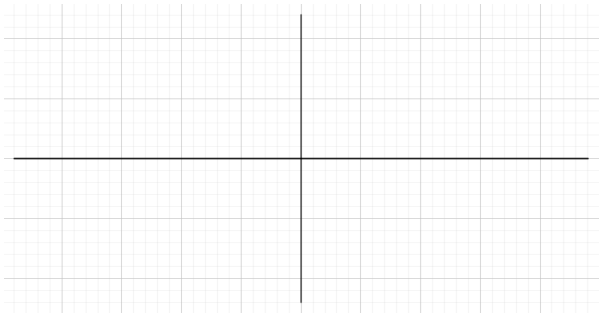
Q3 : a) Les segments de taille 0 de F_n donne deux types de segments de F_{n+1} de taille 0 et 1. Les segments de taille 1 de F_n donne deux types de segments de F_{n+1} de taille 1 et 2, ...
b) Pour une fractale F_n, l'étape de découpage d'un segment de taille p donne deux nouveaux segments dont la longueur est divisée par 4 et de taille $p+1$.
c) cf annexe

Partie 4 : De l'infini dans du fini

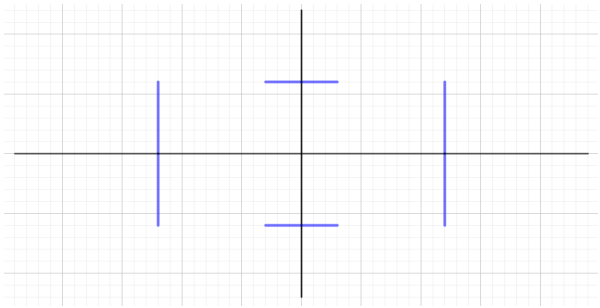
Q1 : a) Un segment de longueur ℓ donne deux segments de longueur $\dfrac{\ell}{2}$ et deux segments de longueur $\dfrac{\ell}{4}$ ce qui représente une longueur égale à $2 \times \dfrac{\ell}{2} + 2 \times \dfrac{\ell}{4} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\ell}{2}$.
b) On obtient pour F_8 une longueur totale égale à $48 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^8 = 123$ cm
c) $48 \times 1.5^{75}/(591 \times 10^6 \times 10^6) \approx 1,3$ donc à partir de $n = 75$.

Annexe 1

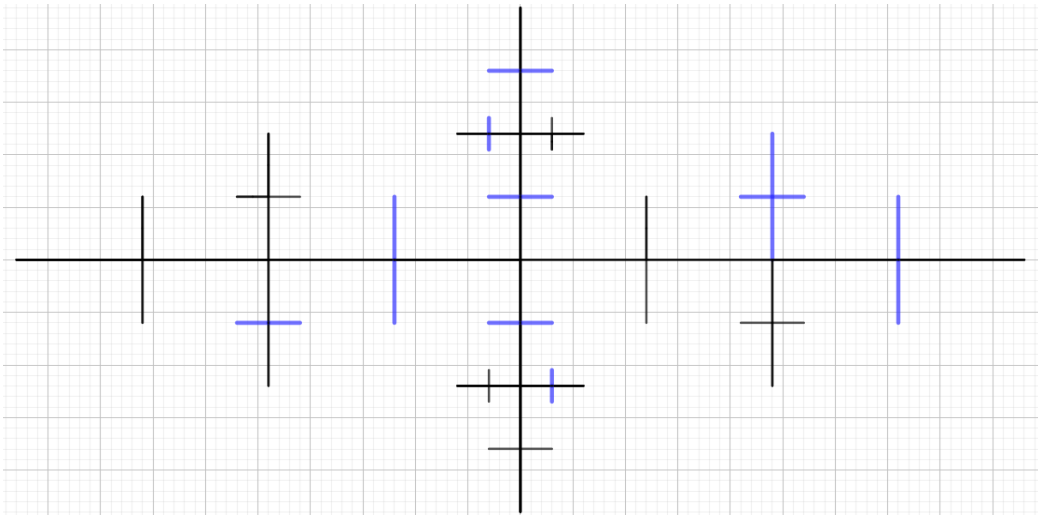
F_0



F_1



F_2



F_3

Annexe 2 : Le triangle des segments

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	2	2				
2	4	8	4			
3	8	24	24	8		
4	16	64	96	64	16	
5	32	160	320	320	160	32

Annexe 3 : Le triangle des longueurs

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	48					
1	24	12				
2	12	6	3			
3	6	3	1,5	0,75		
4	3	1,5	0,75	0,375	0,1875	
5	1,5	0,75	0,375	0,1875	0,0934	0,0469

Corrigé de l'exercice 3 : Organiser un tournoi fermé !

Q1 : Dans cette question, on considère une compétition avec $n = 6$ participants.

(a)

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$i=1$	×	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
$i=2$	×	×	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
$i=3$	×	×	×	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
$i=4$	×	×	×	×	$(4,5)$	$(4,6)$
$i=5$	×	×	×	×	×	$(5,6)$

(b) On a donc 15 matchs possibles pour $n = 6$ participants.
(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)

Q2 : On a $n \times (n-1)$ cases dans un tableau de n colonnes et de $n-1$ lignes. Comme on barre la moitié des cases d'un tel tableau, il reste $\frac{n(n-1)}{2}$ cases non barrées qui correspondent aux matchs possibles. On a donc $\frac{n(n-1)}{2}$ matchs possibles.

Q3 : Une série est déterminée par le choix de l'adversaire du participant 1.
On a donc 3 séries possibles. On a 3 choix pour la première série, 2 pour la seconde, et 1 pour la dernière.
On a donc $3 \times 2 = 6$ tournois possibles.

Q4 :

Série 1	$(1,2)$	$(3,4)$	$(5,6)$
Série 2	$(1,3)$	$(2,5)$	$(4,6)$
Série 3	$(1,4)$	$(2,6)$	$(3,5)$
Série 4	$(1,5)$	$(2,4)$	$(3,6)$
Série 5	$(1,6)$	$(2,3)$	$(4,5)$

Q5 : Dans cette question, on considère un tournoi avec $n = 6$ participants.

(a) On peut en construire trois, cela dépend de l'adversaire du participant 3 qui a trois possibilités parmi les participants 4, 5 et 6 :

- $(1,2), (3,4), (5,6)$
- $(1,2), (3,5), (4,6)$
- $(1,2), (3,6), (4,5)$

(b) On considère l'adversaire du participant 2 à la seconde série :

- Si c'est le participant 4, alors les participants 5 et 6 doivent s'affronter, ce qui n'est pas possible car ils se sont déjà affrontés ;
- Si c'est le participant 5, on obtient comme seconde série $(1,3), (2,5), (4,6)$;
- Si c'est le participant 6, on obtient comme seconde série $(1,3), (2,6), (4,5)$.

Ainsi on a deux secondes séries possibles.

(c) On considère l'adversaire du participant 2 à la seconde série :

- Si c'est le participant 3, alors les participants 5 et 6 doivent s'affronter, ce qui n'est pas possible car ils se sont déjà affrontés ;
- Si c'est le participant 5, on obtient comme troisième série $(1,4), (2,5), (3,6)$;
- Cela ne peut pas être le participant 6 car les participants 2 et 6 se sont déjà rencontrés.

Ainsi on a une seule troisième série possible : $(1,4), (2,5), (3,6)$.

(d)

Série 1	$(1,2)$	$(3,4)$	$(5,6)$
Série 2	$(1,3)$	$(2,6)$	$(4,5)$
Série 3	$(1,4)$	$(2,5)$	$(3,6)$
Série 4	$(1,5)$	$(2,3)$	$(4,6)$
Série 5	$(1,6)$	$(2,4)$	$(3,5)$

(e) On remarque qu'en fixant la condition qu'à la série n°i, le participant 1 rencontre le participant $i+1$, on a trois choix pour la première série, puis deux choix pour la seconde série, les autres séries étant définies de manière unique.
Ainsi on a $3 \times 2 = 6$ tels tournois possibles.

(f) On obtient un tournoi par permutation des séries d'un des tournois de la question précédente. C'est-à dire que pour un tournoi donné de la question précédente, on peut obtenir $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ tournois. En effet, on a :

- Cinq choix pour le numéro de la série contenant le match $(1,2)$;
- Quatre choix pour le numéro de la série contenant le match $(1,3)$;
- Trois choix pour le numéro de la série contenant le match $(1,4)$;
- Deux choix pour le numéro de la série contenant le match $(1,5)$;
- Un choix pour le numéro de la série contenant le match $(1,5)$.

Comme on a 6 tournois de la forme de la question précédente, on en déduit que l'on peut organiser $6 \times 120 = 720$ tournois possibles.

Q6 :

Série 1	$(1,6)$	$(2,5)$	$(3,4)$
Série 2	$(1,2)$	$(3,5)$	$(4,6)$
Série 3	$(1,3)$	$(2,6)$	$(4,5)$
Série 4	$(1,4)$	$(2,3)$	$(5,6)$
Série 5	$(1,5)$	$(2,4)$	$(3,6)$

Corrigé de l'exercice 4 : De ville en ville

Partie 1 : premier exemple avec 3 villes à visiter

Q1 : Les trajets de longueurs différentes sont :

$$S-A-B-C-S, \quad S-A-C-B-S, \quad S-B-A-C-S.$$

Q2 : La longueur du trajet SABCS est :

$$SA + AB + BC + CS = 6 + \sqrt{20} + \sqrt{26} \approx 15,571 \text{ km}.$$

Partie 2 : cas de 4 villes et plus

Q3 : Pour 4 villes, le nombre maximal de trajets de longueurs différentes est : 12.

Q4 : Pour 15 villes, il y a

$$\frac{16 \times 15 \times \cdots \times 3 \times 2}{2}$$

calculs de distance à effectuer. Le temps de calcul serait alors d'environ 104 614 secondes, soit environ 29 heures et 4 minutes.

Q5 : Cette stratégie (énumération complète) donne le trajet optimal, mais le temps de calcul devient prohibitif dès que le nombre de villes augmente.

Partie 3 : étude d'une autre stratégie

Q6 : **(a)**

$$SA = 5 \text{ km}, \quad SB \approx 6,083 \text{ km}, \quad SC = 1 \text{ km}.$$

Le voyageur ira donc de S à C.

(b)

$$CA \approx 4,243 \text{ km}, \quad CB \approx 5,099 \text{ km}.$$

Le voyageur ira de C à A, puis de A à B, puis retour à S. Le trajet sera donc : S – C – A – B – S.

(c) On a dû calculer 5 distances : $D_3 = 5$.

(d) La longueur de S – C – A – B – S est :

$$1 + \sqrt{18} + \sqrt{20} + \sqrt{37} \approx 15,798 \text{ km}.$$

Ce n'est pas le trajet optimal.

Q7 : Pour 4 villes :

$$D_4 = 4 + 3 + 2 = 9.$$

Q8 : Pour n villes ($n \geq 2$) :

$$D_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 = \frac{n(n+1)}{2} - 1.$$

Q9 : Pour 15 villes, il y a 119 calculs de distance, soit un temps de calcul d'environ $1,19 \times 10^{-6}$ seconde.

Q10 : Avantage : le temps de calcul est très faible. Inconvénient : le trajet obtenu n'est pas forcément le trajet optimal.

Corrigé de l'exercice 5 : Partage convivial

Partie 1 : un exemple particulier

Q1 :

Nombre de convives	4	5	6
Nombre de parts de gâteau dans chaque portion	15	12	10

Q2 : **(a)** À la troisième personne : $\frac{8}{60}$ et $\frac{7}{60}$ car $\frac{8}{60} + \frac{7}{60} = \frac{15}{60}$ et à la dernière personne $\frac{5}{60}$, $\frac{4}{60}$, $\frac{3}{60}$, $\frac{2}{60}$ et $\frac{1}{60}$ de somme $\frac{15}{60}$.

(b) On s'arrange à créer des sommes de $\frac{12}{60}$:

- à la première personne : $\frac{10}{60}$ et $\frac{2}{60}$;
- à la deuxième personne : $\frac{9}{60}$ et $\frac{3}{60}$;
- à la troisième personne : $\frac{8}{60}$ et $\frac{4}{60}$;
- à la quatrième personne : $\frac{7}{60}$ et $\frac{5}{60}$;
- à la cinquième personne : $\frac{6}{60}$, $\frac{5}{60}$ et $\frac{1}{60}$.

(c) On s'arrange à créer des sommes de $\frac{10}{60}$:

- à la première personne : $\frac{10}{60}$;
- à la deuxième personne : $\frac{9}{60}$ et $\frac{1}{60}$;
- à la troisième personne : $\frac{8}{60}$ et $\frac{2}{60}$;
- à la quatrième personne : $\frac{7}{60}$ et $\frac{3}{60}$;
- à la cinquième personne : $\frac{6}{60}$ et $\frac{4}{60}$;
- à la sixième personne : $\frac{5}{60}$ et $\frac{5}{60}$;

(d) D'après ce qui précède, on a trouvé un partage en parts qui permet de donner la même portion à chaque convive qu'ils soient 4, 5 ou 6 donc le partage en 11 parts est convivial.

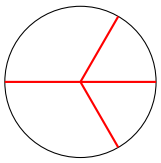
Partie 2 : cas $n = 2$ et $n = 3$

Q3 : **(a)** u_2 est le nombre minimal de parts d'une découpe d'un gâteau telle que l'on puisse se partager équitablement le gâteau que l'on soit en 1, 2 ou 3 personnes.

(b) Il y aura au maximum 3 convives, donc $u_2 \geqslant 3$.

(c) i. La taille de chaque part est alors de $\frac{1}{3}$.

ii. Si l'on coupe seulement en 3 parts, elles seront de même taille pour 3 convives, mais alors il sera impossible de donner autant à chaque personne quand il ne seront que 2. Donc $u_2 \geqslant 4$.

(d) 

On coupe en part de $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{6}$.

(e) $u_2 = 4$ d'après ce qui précède.

Q4 : **(a)** On partage équitablement le gâteau que l'on soit en 2, 3 ou 4 personnes, donc 4 personnes au maximum donc $u_3 \geqslant 4$. Mais si le gâteau était coupé en quatre parts, pour 4 personnes, ces parts auraient des tailles identiques, et il ne serait pas possible de les répartir en 3 pour trois personnes. Donc $u_3 \geqslant 5$.

(b) i. S'il y a 5 parts et 4 convives, un convive a au moins 2 parts (principe des tiroirs) et donc les autres ont chacun 1 part.

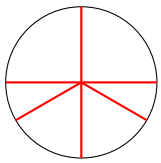
ii. Les convives ont la même portion de gâteau, soit $\frac{1}{4}$.

iii. Il y a trois parts de taille $\frac{1}{4}$ et 2 parts de taille inférieure (dont la somme fait $\frac{1}{4}$. On ne peut donc pas répartir ces dernières sur les trois autres parts.

iv. D'après de qui précède $u_3 \geqslant 6$.

(c) On peut donner comme solution $\frac{3}{12}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{12}$.

- en 2 : $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$ et $\frac{1}{12}$; $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$ et $\frac{1}{12}$.
- en 3 : $\frac{3}{12}$ et $\frac{1}{12}$; $\frac{3}{12}$ et $\frac{1}{12}$; $\frac{2}{12}$ et $\frac{2}{12}$.
- en 4 : $\frac{3}{12}$; $\frac{3}{12}$; $\frac{2}{12}$ et $\frac{1}{12}$; $\frac{2}{12}$ et $\frac{1}{12}$.

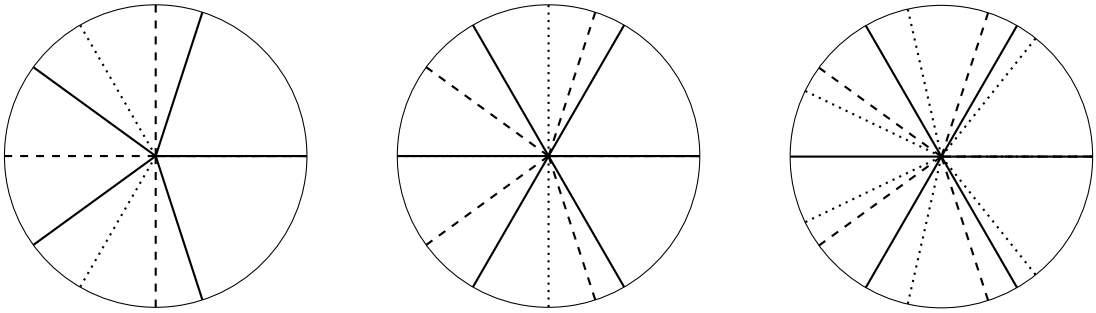


Partie 3 : vers une généralisation

Q5 : Pour u_n, il y a au maximum $n+1$ convives, donc $u_n \geqslant n+1$.

Q6 : Si l'un des convives n'a qu'une part, lorsque ceux-ci sont n, sa part mesure $\frac{1}{n}$. Elle est donc trop grosse pour un nombre de convives à $n+1$. Tous les convives ont donc au moins 2 parts quand ils sont n. Donc $u_n \geqslant 2n$.

Q7 : Pour $n-1$ convives, on coupe le gâteau en $n-1$ parts égales, de même pour n et $n+1$, mais en partant à chaque fois du même rayon de découpe. Ce qui donne au maximum $n-1+n+n+1-2 = 3n-2$ parts.
Voici des exemples pour $n=4$, $n=5$ et $n=6$:



Q8 : $2n \leqslant u_n \leqslant 3n-2$

Corrigé de l'exercice 6 : Gamme musicale

Partie 1 : Construction des octaves

Q1 : Voici le tableau rempli :

Numéro de l'octave au-dessus ou au-dessous de f_0	1	2	3	4
Fréquence de l'octave au-dessus correspondante	880	1740	3480	6960
Fréquence de l'octave au-dessous correspondante	220	110	55	27,5

Q2 : Voici l'axe gradué complété, en respectant l'échelle proposée :



Q3 : On reconnait une suite géométrique de raison 2 et de premier terme f_0, d'où la formule.
On a $f_1^- = \frac{1}{2}f_0$, et donc on a de même : $f_n^- = \frac{f_0}{2^n}$. On peut noter que cette fois-ci c'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Q4 : On a $f_{n+1}^+ - f_n^+ = 2^{n+1}f_0 - 2^n f_0 = (2^n \times 2 - 2^n)f_0 = 2^n f_0$. Cet écart dépend de n, on peut de plus noter qu'il devient grand lorsque n est grand.

Partie 2 : Construction des quintes

Q1 : On a $f_0 = \frac{2}{3}q_1$.

Q2 : Voici le tableau rempli :

Numéro n de la quinte	1	2	3	4	5	6
Fréquence de la n-ième quinte	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{729}{64}$
Fréquence ramenée dans l'intervalle $[1,2]$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{729}{512}$
Valeur approchée à 10^{-2}	1,5	1,13	1,69	1,27	1,90	1,42

Q3 : Voici le tableau rempli :

Numéro n de la quinte ordonnée	2	4	6	1	3	5
Valeur approchée à 10^{-2}	1,13	1,27	1,42	1,5	1,69	1,90

Q4 : A l'aide de la calculette :

$$(\frac{3}{2})^{12} \approx 129,75 \text{ et } 2^7 = 128.$$

L'égalité n'est donc pas vraie, même si les deux valeurs sont proches.

Q5 : On aurait

$$(\frac{3}{2})^n = 2^p \iff \frac{3^n}{2^n} = 2^p \iff 3^n = 2^n \times 2^p \iff 3^n = 2^{n+p}$$

Or 3^n est divisible par 3, mais 2^{n+p} n'est divisible que par 2 et ses puissances, c'est absurde.

Partie 3 : Couper un intervalle en deux

Q1 : On a : $\frac{c}{a} = \frac{b}{c} \iff c^2 = ab$, et donc puisque $c \geq 0$ ou trouve $c = \sqrt{ab}$.

Q2 : La formule ci-dessus donne pour le milieu géométrique :

$$c = \sqrt{f_0 \times 2f_0} = \sqrt{2} \times \sqrt{f_0^2} = \sqrt{2}f_0.$$

Q3 : Le milieu de l'intervalle $[f_0, 2f_0]$ vaut $\frac{f_0 + 2f_0}{2} = \frac{3f_0}{2}$: il s'agit bien de la quinte au-dessus de f_0. On a trouvé que la moyenne géométrique vaut $\sqrt{2}f_0$. Avec la calculette, on trouve que $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, donc la moyenne géométrique est plus petite que le milieu.

Corrigé de l'exercice 7 : Segments pixellisés

Correction : Segments pixellisés

Partie 1 - Les motifs

Q1 : **(a)** cf annexe
(b) cf annexe
(c) cf annexe

Q1 : **(a)** Sur la largeur, le centre du pixel de départ et celui d'arrivée sont espacés de $a-1$ pixels.
Sur la hauteur, le centre du pixel de départ et celui d'arrivée sont espacés de $b-1$ pixels.
Comme on ne peut se déplacer en diagonal, il y a $a-1+b-1=a+b-2$ déplacements à réaliser.
(b) Si l'on assimile les $n=a+b-2$ déplacements comme des cases comme dans la définition, il faut choisir $a-1$ (ou $b-1$...) cases pour décider des déplacements vers la droite. D'où le résultat.

Q2 : Le nombre de motifs est $C(12+8-2,8-1)=C(18,7)=\dfrac{18\times17\times16\times...12}{7\times6\times5\times...\times1}=31824$

Partie 2 - Les segments pixellisés

Q1 : **(a)** Si l'on a R motifs, il faut $a\times R$ pixels de large pour remplir le segment donc $aR=x$ et R divise x.
De même, sur la hauteur, on a $bR=y$ donc R divise y.
Donc R est un diviseur commun de x et de y.
(b) On a alors $a=\dfrac{x}{R}$ et $b=\dfrac{y}{R}$.

Q2 : **(a)** les diviseurs communs de 4 et 8 sont : 1,2,4.
Pour R = 1, on a un motif de taille $a=4$ et $b=8$.
Pour R = 2, on a un motif de taille $a=2$ et $b=4$.
Pour R = 4, on a un motif de taille $a=1$ et $b=2$.
(b) cf annexe

Q3 : **(a)** les diviseurs communs de 12 et 24 sont : 1,2,3,,4,6,12.
Pour R = 1, on a un motif de taille $a=12$ et $b=24$.
Pour R = 2, on a un motif de taille $a=6$ et $b=12$.
Pour R = 3, on a un motif de taille $a=4$ et $b=8$.
Pour R = 4, on a un motif de taille $a=3$ et $b=6$.
Pour R = 6, on a un motif de taille $a=2$ et $b=4$.
Pour R = 12, on a un motif de taille $a=1$ et $b=2$.
(b) cf annexe

Partie 3 - Les segments pixellisés réguliers

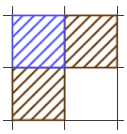
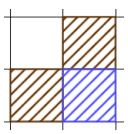
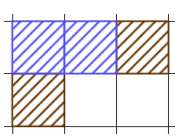
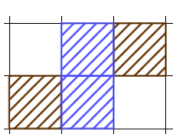
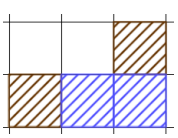
Q1 : Pour $x=y$, on prend un motif de taille $(1,1)$ et $R=x$.
Les deux conditions sont bien vérifiées car $b=1$ et R divise x et y d'après la partie précédente.

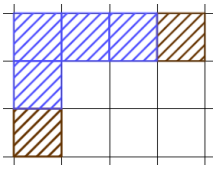
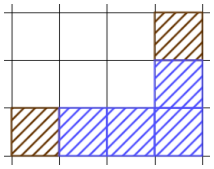
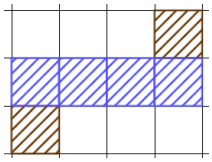
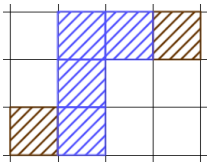
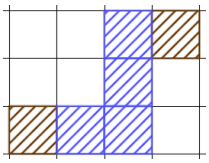
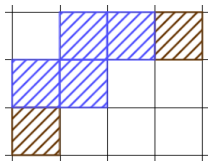
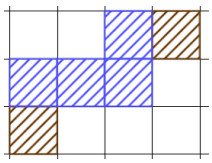
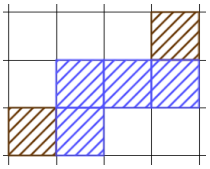
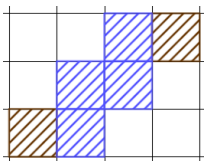
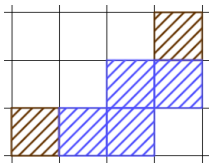
Q2 : R doit être un diviseur commun de x et de y. Le plus grand est donc $pgcd(x,y)$.
De plus dans ce cas, $b=\dfrac{y}{R}$ est le plus petit entier possible.

Q3 : **(a)** $R=pgcd(8,12)=4$ et le motif a pour taille $a=\dfrac{8}{4}=2$, $b=\dfrac{12}{4}=3$.
(b) cf annexe

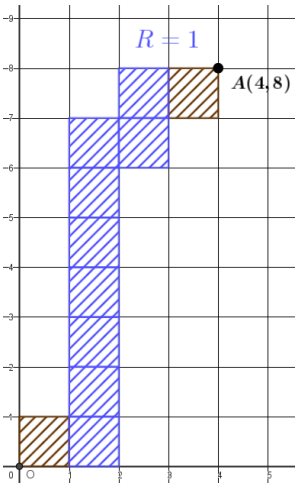
Q4 : On a nécessairement $x=aR=20$ et $4b=y$.
Donc les couples possibles sont $(20,y)$ avec y un multiple non nul de 4.

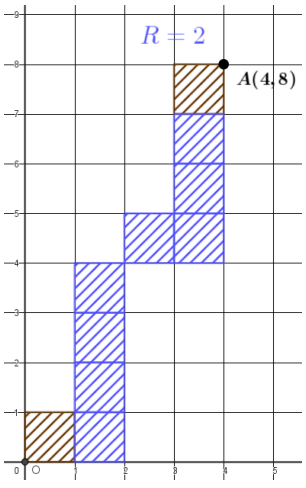
Annexe 1

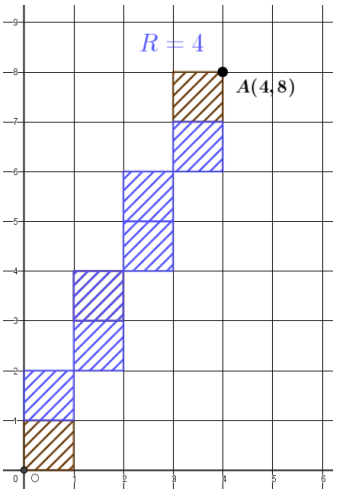






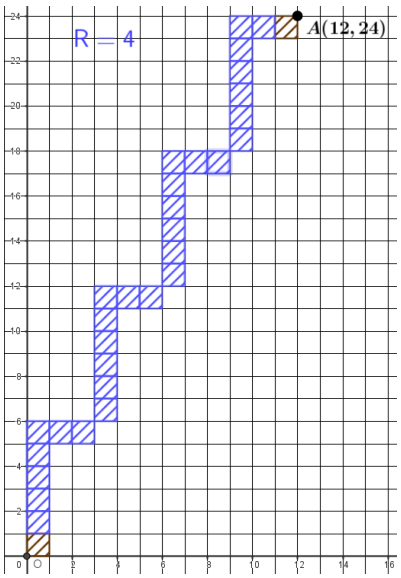











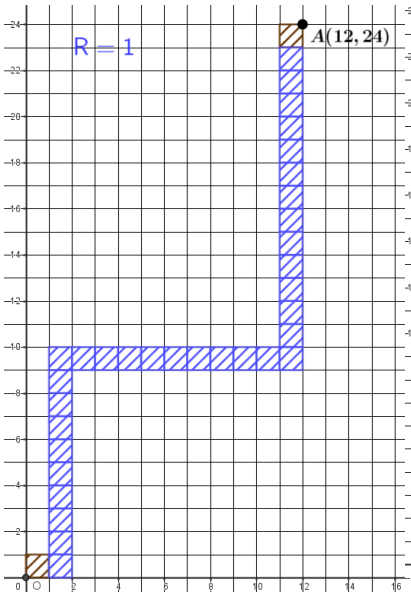
Annexe 2.1

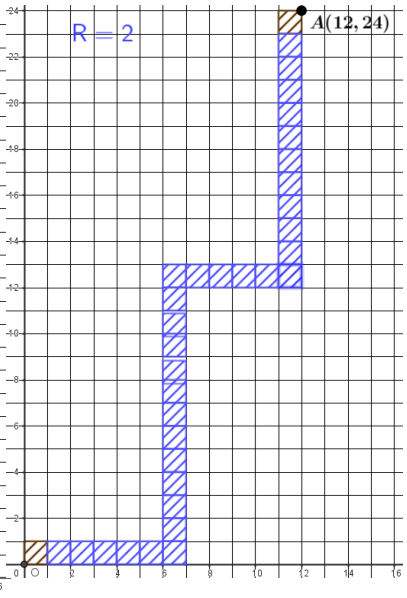


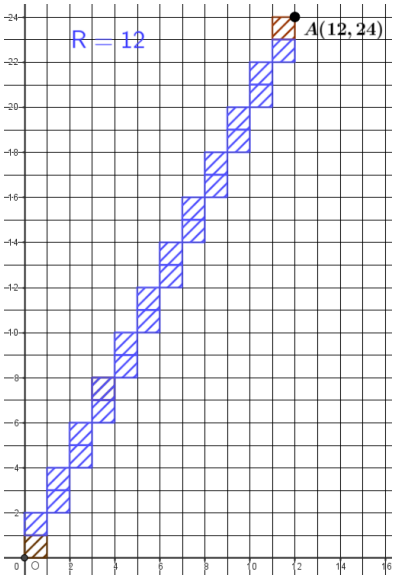


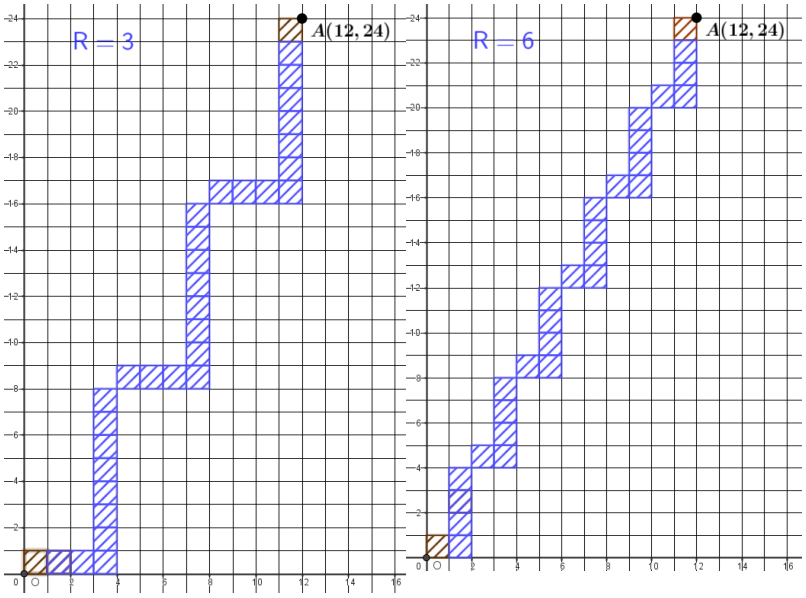



R = 4
A(12, 24)

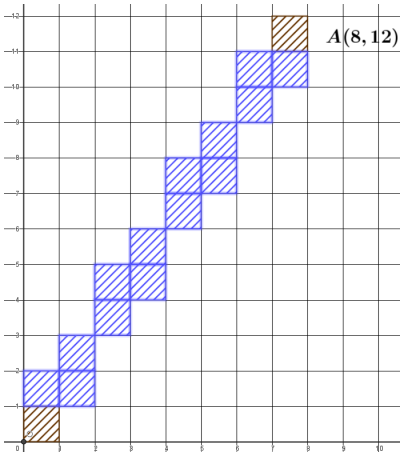

R = 1
A(12, 24)


R = 2
A(12, 24)

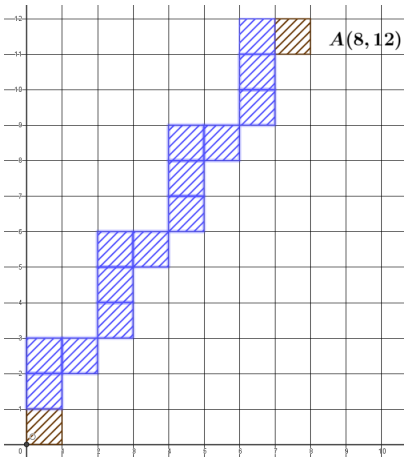




Annexe 3



Exemple 1



Exemple 2