## Exercice 1. Écriture en base 7

beginexercice[Titre=Écriture en base 7,TitreSolution=Correction de l'exercice 1]

**Les nombres que nous utilisons dans la vie courante sont écrits en base 10, correspondant au nombre de doigts des deux mains. Lorsque nous comptons nous décomposons les nombres entiers naturels suivant les puissances de 10.**

Par exemple : $2356 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6$.

Le système septénaire consiste à compter en base 7. Écrire un nombre entier naturel en base 7 consiste à décomposer ce nombre suivant les puissances de 7. Un nombre entier N s'écrit en base 7 : $\overline{a_p a_{p-1} ... a_0}^7$ où les $a_i$ sont des entiers naturels strictement inférieurs à 7 et sont appelés les chiffres de N en base 7.

### Partie A : Conversion en base 10

La valeur en base 10 d'un nombre écrit en base 7 est :

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0}^7 = a_n \times 7^n + a_{n-1} \times 7^{n-1} + ... + a_1 \times 7^1 + a_0 \times 7^0$$

Par exemple $\overline{324}^7$ est un nombre à trois chiffres écrit en base 7 et sa conversion en base 10 se calcule de la manière suivante :

$$\overline{324}^7 = 3 \times 7^2 + 2 \times 7^1 + 4 \times 7^0 = 3 \times 7^2 + 2 \times 7 + 4 = 165.$$

**Q1 :** Donner la valeur en base 10 de $\overline{5624}^7$ et $\overline{36214}^7$.

**Q2 :** Quelle est la valeur en base 10 du plus grand nombre à quatre chiffres en base 7 ?

### Partie B : Opérations en base 7

**Q3 :** Sans passer par la base 10, donner le nombre qui précède $\overline{120}^7$ et celui qui suit $\overline{366}^7$.

**Q4 :** Addition en base 7. Voici un exemple d'addition posée en base 7 :

$$\begin{array}{cccc} & 3_1 & 2_1 & 5 \\ + & 1 & 6 & 2 \\ \hline & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

(a) Justifier les deux retenues situées à côté des chiffres 3 et 2.

(b) Calculer $\overline{434}^7 + \overline{364}^7$.

**Q5 :** Soustraction en base 7. Voici un exemple de soustraction posée en base 7 :

$$\begin{array}{cccc} & 5 & 2_1 & 6 \\ - & 3_1 & 6 & 4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

(a) Justifier les deux retenues situées à côté des chiffres 2 et 3.

(b) Calculer $\overline{421}^7 - \overline{264}^7$.

**Q6 :** Multiplication en base 7.

(a) On a le résultat : $\overline{23}^7 \times \overline{13}^7 = \overline{332}^7$. Justifier ce résultat à l'aide d'une multiplication posée.

(b) Calculer $\overline{2506}^7 \times \overline{35}^7$.

### Partie C : Quelques problèmes

**Q7 :** Convertir le nombre 2025 en base 7.

**Q8 :** Sur la planète Azimuth, on a $\overline{435}^b + \overline{242}^b = \overline{1121}^b$.

(a) Les Azimuthiens ont-ils 7 doigts ? Justifier.

(b) Combien les Azimuthiens ont-ils de doigts ?

**Q9 :** Déterminer la valeur du chiffre $x$ tel que $\overline{3x4}^7$ soit un multiple de 6.

**Q10 :** Combien y a-t-il de nombres entiers compris entre $\overline{4233}^7$ et $\overline{551024}^7$ ?

**Q11 :** Déterminer l'ensemble des nombres entiers $x$ écrits en base 7 tels que :

$$\overline{336}^7 \leqslant \overline{12}^7 x - \overline{45}^7 \leqslant \overline{444}^7.$$

## Exercice 2. Somme de deux dés

On considère deux dés à six faces auxquels on associe les lois de probabilités suivantes :
**Premier dé :**

| Face | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ |

**Deuxième dé :**

| Face | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ | $q_5$ | $q_6$ |

On s'intéresse à l'expérience aléatoire (E), lors de laquelle on lance ces deux dés puis on additionne les résultats obtenus. Par exemple, si le lancer du premier dé donne 3 et que le lancer du second donne 5, la somme considérée vaut 8.
Pour tout entier $i$ tel que $2 \leq i \leq 12$, on note $s_i$ la probabilité que la somme des deux valeurs obtenues en lançant les dés soit égale à $i$.
Le tableau suivant sera appelé loi de probabilité de la somme des deux dés :

| Somme | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | $s_7$ | $s_8$ | $s_9$ | $s_{10}$ | $s_{11}$ | $s_{12}$ |

Le but du problème est de trouver les lois de probabilités des deux dés qui rapprochent le plus possible la répartition des probabilités des sommes d'une répartition uniforme, correspondant à l'équiprobabilité des 11 sommes. Pour cela, on cherchera à minimiser la valeur notée D, définie par :

$$\mathrm{D} = \sum_{j=2}^{12}\left(s_j - \frac{1}{11}\right)^2 = \left(s_2 - \frac{1}{11}\right)^2 + \left(s_3 - \frac{1}{11}\right)^2 + \cdots + \left(s_{12} - \frac{1}{11}\right)^2$$

### Partie A : Comparaison de deux cas particuliers

**Q1 :** **Situation 1 :** Dans cette question, on suppose que les deux dés sont équilibrés.

(a) Démontrer que $s_{11} = \dfrac{2}{36}$.
(b) Déterminer la loi de probabilité de la somme de ces deux dés.
(c) Calculer la valeur de D pour ces deux dés.

**Q2 :** **Situation 2 :** Dans cette question, on suppose que le premier dé est équilibré, mais que l'on a truqué le deuxième dé de telle sorte que $q_1 = q_6 = \dfrac{1}{2}$.

(a) Démontrer que $s_{11} = \dfrac{1}{12}$.
(b) Déterminer la loi de probabilité de la somme de ces deux dés.
(c) Calculer la valeur de D pour ces deux dés.

**Q3 :** Pour laquelle des deux situations précédentes se rapproche-t-on le plus de l'équiprobabilité des 11 sommes ?

### Partie B : Une répartition uniforme est-elle possible ?

**Q4 :** Démontrer que $s_7 \geqslant p_1q_6 + p_6q_1$.

**Q5 :** Développer et réduire $\left(\sqrt{p_1q_6} - \sqrt{p_6q_1}\right)^2$.

**Q6 :** En déduire que $s_7 \geqslant 2\sqrt{s_2s_{12}}$.

**Q7 :** Dans l'expérience aléatoire (E), les probabilités de toutes les sommes peuvent-elles être égales ?

### Partie C : Un peu d'algèbre

**Q8 :** Démontrer que :

$$\mathrm{D} = \sum_{j=2}^{12} s_j^2 - \frac{1}{11} = s_2^2 + s_3^2 + \cdots + s_{12}^2 - \frac{1}{11}$$

**Q9 :** **(a)** Démontrer que :

$$8(s_2^2 + s_7^2 + s_{12}^2) - 3(s_2 + s_7 + s_{12})^2 = 2(s_7^2 - 4s_2 s_{12}) + (s_7 - s_2 - s_{12})^2 + (s_7 - 2s_2)^2 + (s_7 - 2s_{12})^2$$

**(b)** En déduire que :

$$s_2^2 + s_7^2 + s_{12}^2 \geqslant \frac{3}{8}(s_2 + s_7 + s_{12})^2$$

**Q10 :** Soient $a, b, c, d, e, f, g, h$ huit nombres réels quelconques. Démontrer que :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 \geqslant \frac{(a+b+c+d+e+f+g+h)^2}{8}$$

### Partie D : S'approcher d'une répartition uniforme

Les résultats de la partie C peuvent être utilisés dans la partie D.

Soit $r = s_2 + s_7 + s_{12}$ et soit $f$ la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{(1-x)^2}{8}$.

**Q11 :** Démontrer que :

$$\sum_{j=2}^{12} s_j^2 \geqslant f(r)$$

**Q12 :** Étudier les variations de la fonction $f$.

**Q13 :** En déduire que $\mathrm{D} \geqslant \dfrac{1}{352}$.

**Q14 :** Démontrer que $\mathrm{D} = \dfrac{1}{352}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} s_7 = 2s_2 \\ s_{12} = s_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \left\{ s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = s_8 = s_9 = s_{10} = s_{11} = \frac{3}{2}s_2 \right.$$

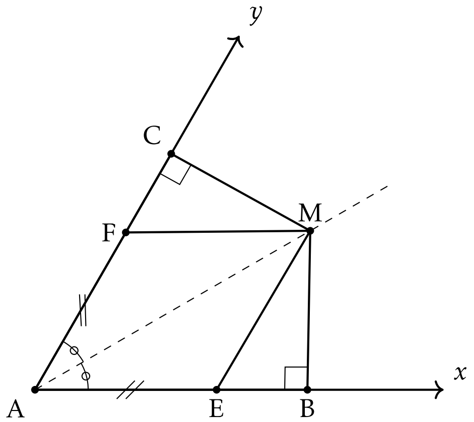
**Q15 :** Déterminer une loi de probabilité pour chacun des deux dés de telle sorte que $\mathrm{D} = \dfrac{1}{352}$.

## Exercice 3. Triangle de Maxwell

### Partie A : Construction de la bissectrice d'un angle

On définit la bissectrice d'un angle $\widehat{y\mathrm{A}x}$ de mesure comprise entre 0° et 180° comme étant la demi-droite qui le partage en deux angles de même mesure.
Soit M un point de la bissectrice. On construit :

- le triangle AMB rectangle en B avec B appartenant à $[\mathrm{A}x)$ ;
- le triangle AMC rectangle en C avec C appartenant à $[\mathrm{A}y)$ ;
- deux points E et F appartenant respectivement à $[\mathrm{A}x)$ et à $[\mathrm{A}y)$, tels que AE = AF.




**Q1 :** Montrer que les deux triangles AMB et AMC sont semblables.

**Q2 :** En déduire que MB = MC et que ME = MF.

**Q3 :** Trouver une construction à la règle et au compas de la bissectrice d'un angle, et réaliser cette construction sur l'annexe 1. On laissera les traces de construction.

## Partie B : Triangle isocèle rectangle

Dans cette partie le triangle RVB est isocèle rectangle en B, avec BR = 5 cm.
On considère les deux points E et F représentant les couleurs $(1, 2, b_E)$ et $(1, v_F, 1)$.

**Q4 :** **(a)** Faire une figure et placer les points E et F. On justifiera la construction, notamment en laissant les traits de construction.

**(b)** Déterminer la valeur de $v_F$.

**(c)** Déterminer les aires des triangles BEV, BER et BRV.

**(d)** En déduire l'aire de REV et la valeur de $b_E$.

**Q5 :** La somme $r + v + b$ est-elle constante pour n'importe quel point à l'intérieur de RVB ?

## Partie C : Triangle équilatéral

Dans cette partie le triangle RVB est équilatéral de côté $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

**Q6 :** En utilisant le principe de la question 1 de la partie B, montrer que $r + v + b = 1$.

**Q7 :** Où se situe le point ayant les 3 composantes de même valeur ?

**Q8 :** Faire un schéma sur la copie pour représenter l'ensemble de tous les points dont la composante rouge vaut $0,2$.

**Q9 :** On définit la zone rouge comme l'ensemble des points dont la composante rouge est plus grande que chacune des deux autres composantes bleue et verte. De manière analogue on définit les zones bleue et verte.
Dessiner les trois zones avec les couleurs correspondantes sur la figure de l'annexe 2. Justifier.

Strasbourg 2025
(Correction)

**Corrigé de l'exercice 1 : Écriture en base 7**

## Partie A : Conversion en base 10

**Q1 :** $\overline{5624}^7 = 2027_{10}$
$\overline{36214}^7 = 9370_{10}$

**Q2 :** Le plus grand nombre à quatre chiffres en base 7 est $\overline{6666}^7 = 2400_{10}$.

## Partie B : Opérations en base 7

**Q3 :** Le nombre qui précède $\overline{120}^7$ est $\overline{116}^7$.
Le nombre qui suit $\overline{366}^7$ est $\overline{400}^7$.

**Q4 :** **(a)** Justification des retenues : en base 7, $5+2=7$, ce qui fait une retenue de 1 ; puis $1+3+6=10$, qui en base 7 donne 3 et retenue 1.

**(b)** $\overline{434}^7 + \overline{364}^7 = \overline{1131}^7$.

**Q5 :** **(a)** Justification des retenues : en base 7, $6-4=2$ (pas de retenue) ; puis $2-6$ n'est pas possible, on emprunte 1 : $12-6=3$ ; puis $4-3=1$.

**(b)** $\overline{421}^7 - \overline{264}^7 = \overline{124}^7$.

**Q6 :** **(a)**

$$\begin{array}{cccc} & & 2_1 & 3 \\ \times & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 2 \\ + & 2 & 3 & \\ \hline & 3 & 3 & 2 \end{array}$$

**(b)** $\overline{2506}^7 \times \overline{35}^7 = \overline{131012}^7$.

## Partie C : Quelques problèmes

**Q7 :** $2025_{10} = \overline{5622}^7$.

**Q8 :** **(a)** Non, car si $b=7$, l'égalité n'est pas vérifiée en prenant les chiffres des unités, 5+2=0 en base 7.

**(b)** $b=6$ (vérification : $435_6 = 167_{10}$, $242_6 = 98_{10}$, $1121_6 = 265_{10}$, l'égalité est vérifiée).

**Q9 :** $x=5$ (justification par calcul en base 10 : $\overline{3x4}^7 = 3\times 49 + 7x + 4 = 151 + 7x$, doit être divisible par 6).

**Q10 :** $\overline{4233}^7 = 1494_{10}$, $\overline{551024}^7 = 96401_{10}$.
Il y a $96401 - 1494 + 1 = 94908$ nombres entiers compris entre ces deux valeurs.

**Q11 :** $\overline{336}^7 \leqslant \overline{12}^7 x - \overline{45}^7 \leqslant \overline{444}^7$
$\iff 174 \leqslant 9x - 33 \leqslant 228$
$\iff 207 \leqslant 9x \leqslant 261$
$\iff 23 \leqslant x \leqslant 29$
En base 7 : $x \in \{\overline{32}^7, \overline{33}^7, \overline{34}^7, \overline{35}^7, \overline{36}^7, \overline{40}^7, \overline{41}^7\}$.

**Corrigé de l'exercice 2 : Somme de deux dés**

## Partie A : Comparaison de deux cas particuliers

**Q1 :** **Situation 1 :** Les deux dés sont équilibrés.

**(a)** $s_{11} = \dfrac{2}{36}$ car la somme 11 peut être obtenue par $(5,6)$ ou $(6,5)$.

**(b)** Loi de probabilité de la somme :

| $j$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_j$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

(c) $D = \dfrac{3410}{156816} = \dfrac{155}{7128}$

**Q2 : Situation 2 :** Premier dé équilibré, deuxième dé avec $q_1 = q_6 = \dfrac{1}{4}$.

(a) $s_{11} = \dfrac{1}{12}$ car $s_{11} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

(b) Loi de probabilité de la somme :

| $j$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_j$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{24}$ |

(c) $D = \dfrac{990}{156816} = \dfrac{5}{792}$

**Q3 :** La situation 2 se rapproche le plus de l'équiprobabilité car $\dfrac{5}{792} < \dfrac{155}{7128}$.

## Partie B : Une répartition uniforme est-elle possible ?

**Q4 :** $s_7 = p_1q_6 + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + p_6q_1 \geqslant p_1q_6 + p_6q_1$

**Q5 :** $\left(\sqrt{p_1q_6} - \sqrt{p_6q_1}\right)^2 = p_1q_6 + p_6q_1 - 2\sqrt{p_1q_6p_6q_1}$

**Q6 :** $s_7 \geqslant p_1q_6 + p_6q_1 = \left(\sqrt{p_1q_6} - \sqrt{p_6q_1}\right)^2 + 2\sqrt{p_1q_6p_6q_1} \geqslant 2\sqrt{p_1q_6p_6q_1} = 2\sqrt{s_2s_{12}}$

**Q7 :** Non, car si $s_2 = s_{12} = \dfrac{1}{11}$, alors $s_7 \geqslant \dfrac{2}{11}$, ce qui est impossible si toutes les sommes sont équiprobables.

## Partie C : Un peu d'algèbre

**Q8 :** $D = \displaystyle\sum_{j=2}^{12}\left(s_j - \frac{1}{11}\right)^2 = \sum_{j=2}^{12} s_j^2 - \frac{2}{11}\sum_{j=2}^{12} s_j + 11 \times \frac{1}{121} = \sum_{j=2}^{12} s_j^2 - \frac{1}{11}$

**Q9 :** (a) D'une part :

$$\begin{aligned}
8(s_2^2+s_7^2+s_{12}^2)-3(s_2+s_7+s_{12})^2 &= 8s_2^2+8s_7^2+8s_{12}^2-3\left(s_2^2+s_7^2+s_{12}^2+2s_2s_7+2s_2s_{12}+2s_7s_{12}\right)\\
&= 8s_2^2+8s_7^2+8s_{12}^2-3s_2^2-3s_7^2-3s_{12}^2-6s_2s_7-6s_2s_{12}-6s_7s_{12}\\
&= (8-3)s_2^2+(8-3)s_7^2+(8-3)s_{12}^2-6s_2s_7-6s_2s_{12}-6s_7s_{12}\\
&= 5s_2^2+5s_7^2+5s_{12}^2-6s_2s_7-6s_2s_{12}-6s_7s_{12}
\end{aligned}$$

D'autre aprt :

$$\begin{aligned}
&2(s_7^2-4s_2s_{12})+(s_7-s_2-s_{12})^2+(s_7-2s_2)^2+(s_7-2s_{12})^2\\
&= 2s_7^2-8s_2s_{12}+\left(s_7^2+s_2^2+s_{12}^2-2s_7s_2-2s_7s_{12}+2s_2s_{12}\right)\\
&\quad+\left(s_7^2-4s_7s_2+4s_2^2\right)+\left(s_7^2-4s_7s_{12}+4s_{12}^2\right)\\
&= 2s_7^2-8s_2s_{12}+s_7^2+s_2^2+s_{12}^2-2s_7s_2-2s_7s_{12}+2s_2s_{12}\\
&\quad+s_7^2-4s_7s_2+4s_2^2+s_7^2-4s_7s_{12}+4s_{12}^2\\
&= (2s_7^2+s_7^2+s_7^2+s_7^2)+(s_2^2+4s_2^2)+(s_{12}^2+4s_{12}^2)\\
&\quad+(-2s_7s_2-4s_7s_2)+(-2s_7s_{12}-4s_7s_{12})\\
&\quad+(-8s_2s_{12}+2s_2s_{12})\\
&= 5s_7^2+5s_2^2+5s_{12}^2-6s_7s_2-6s_7s_{12}-6s_2s_{12}
\end{aligned}$$

**Conclusion :** Les deux expressions développées sont identiques :
Donc : $8(s_2^2+s_7^2+s_{12}^2)-3(s_2+s_7+s_{12})^2 = 2(s_7^2-4s_2s_{12})+(s_7-s_2-s_{12})^2+(s_7-2s_2)^2+(s_7-2s_{12})^2$

(b)

$$s_2^2+s_7^2+s_{12}^2 = \frac{3}{8}(s_2+s_7+s_{12})^2+\frac{1}{8}\left[2(s_7^2-4s_2s_{12})+(s_7-s_2-s_{12})^2+(s_7-2s_2)^2+(s_7-2s_{12})^2\right]$$

Comme $s_7^2-4s_2s_{12} \geqslant 0$ d'après Q6 et tous les carrés sont positifs, on a l'inégalité :

$$s_2^2+s_7^2+s_{12}^2 \geqslant \frac{3}{8}(s_2+s_7+s_{12})^2$$

L'égalité a lieu si et seulement si :

$$\begin{cases} s_7^2 - 4s_2s_{12} = 0 \\ s_7 - s_2 - s_{12} = 0 \\ s_7 - 2s_2 = 0 \\ s_7 - 2s_{12} = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $s_2 = s_{12} = \frac{s_7}{2}$.

**Q10 :** On utilise le fait que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x-y)^2 \geqslant 0 \iff x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0 \iff 2xy \leqslant x^2 + y^2$.
Puis en développant :

$$\begin{aligned}(a+b+c+d+e+f+g+h)^2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2\\ &\quad + 2(ab+ac+ad+ae+af+ag+ah)\\ &\quad + 2(bc+bd+be+bf+bg+bh)\\ &\quad + 2(cd+ce+cf+cg+ch)\\ &\quad + 2(de+df+dg+dh)\\ &\quad + 2(ef+eg+eh)\\ &\quad + 2(fg+fh)\\ &\quad + 2(gh)\\ &\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+7(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)\\ &\leqslant 8(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)\end{aligned}$$

## Partie D : S'approcher d'une répartition uniforme

**Q11 :** D'après Q9b et Q10, on a :

$$\sum_{j=2}^{12} s_j^2 \geqslant \frac{3}{8}r^2 + \frac{(1-r)^2}{8} = f(r)$$

**Q12 :** $f$ est polynômiale donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}(1-x) = x - \frac{1}{4}$
$f$ décroît sur $[0, \frac{1}{4}]$, croît sur $[\frac{1}{4}, 1]$, minimum en $x = \frac{1}{4}$ avec $f(\frac{1}{4}) = \frac{3}{32}$

**Q13 :** $\mathrm{D} = \sum_{j=2}^{12} s_j^2 - \frac{1}{11} \geqslant f(r) - \frac{1}{11} \geqslant \frac{3}{32} - \frac{1}{11} = \frac{1}{352}$

**Q14 :** L'égalité $\mathrm{D} = \frac{1}{352}$ nécessite toutes les égalités dans les inégalités précédentes, ce qui donne les conditions.

**Q15 :** Une solution possible :

| Face | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| $q_j$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{8}$ |

**Corrigé de l'exercice 3 : Triangle de Maxwell**

## Partie A : Construction de la bissectrice d'un angle

**Q1 :** Les triangles AMB et AMC sont rectangles respectivement en B et en C. Ils partagent le même côté [AM]. De plus, l'angle $\widehat{\mathrm{BAM}}$ est égal à l'angle $\widehat{\mathrm{CAM}}$ car M appartient à la bissectrice. Donc les deux triangles ont deux angles égaux (un angle droit et un angle aigu égal), ils sont donc semblables.

**Q2 :** Par similitude des triangles AMB et AMC, on a proportionnalité des côtés correspondants. En particulier, MB = MC car ces sont les côtés opposés aux angles égaux $\widehat{\mathrm{BAM}}$ et $\widehat{\mathrm{CAM}}$ dans des triangles rectangles.
Pour ME = MF, on utilise les triangles AEM et AFM : ils ont AE = AF (par construction), AM commun, et $\widehat{\mathrm{EAM}} = \widehat{\mathrm{FAM}}$. Ils sont donc isométriques par le cas d'égalité "côté-angle-côté", d'où ME = MF.

**Q3 :** Construction à la règle et au compas :

- Tracer un cercle de centre A qui coupe [A$x$) en E et [A$y$) en F.
- Tracer les cercles de même rayon de centres E et F. Ils se coupent en un point M.
- La droite (AM) est la bissectrice recherchée.

(Traces de construction sur l'annexe 1)

## Partie B : Triangle isocèle rectangle

**Q4 :** **(a)** Figure : Triangle RVB rectangle isocèle en B avec BR = 5 cm.

- Point E : $(1, 2, b_E)$ signifie que E est à distance 1 de [BV], 2 de [BR].
- Point F : $(1, v_F, 1)$ signifie que F est à distance 1 de [BV], 1 de [VR].

**(b)** Pour F : F est à distance 1 de [BV] et 1 de [VR]. Dans un triangle rectangle isocèle, ces distances correspondent aux coordonnées dans un repère adapté. On trouve $v_F = 4 - \sqrt{2}$.

**(c)**
- $\mathcal{A}(\text{BEV}) = \dfrac{5 \times 1}{2} = \dfrac{5}{2} = 2,5 \text{ cm}^2$
- $\mathcal{A}(\text{BER}) = \dfrac{5 \times 2}{2} = 5 \text{ cm}^2$
- $\mathcal{A}(\text{BRV}) = \dfrac{5 \times 5}{2} = \dfrac{25}{2} = 12,5 \text{ cm}^2$

**(d)** $\mathcal{A}(\text{REV}) = \mathcal{A}(\text{BRV}) - \mathcal{A}(\text{BEV}) - \mathcal{A}(\text{BER}) = 12,5 - 2,5 - 5 = 5 \text{ cm}^2$.

Comme $\mathcal{A}(\text{REV}) = \dfrac{\text{RV} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{5\sqrt{2} \times b_E}{2}$, on a :

$$\frac{5\sqrt{2} \times b_E}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad b_E = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

**Q5 :** La somme $r + v + b$ n'est pas constante pour n'importe quel point à l'intérieur de RVB.
Contre-exemple :

- Pour E : $r + v + b = 1 + 2 + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2} \approx 4,414$
- Pour F : $r + v + b = 1 + (4 - \sqrt{2}) + 1 = 6 - \sqrt{2} \approx 4,586$

Les sommes sont différentes, donc la somme n'est pas constante.

## Partie C : Triangle équilatéral

**Q6 :** Soit $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ la longueur du côté du triangle équilatéral RVB.
Pour un point C à l'intérieur du triangle, notons :

- $r$ la distance de C à [BV]
- $v$ la distance de C à [BR]
- $b$ la distance de C à [VR]

L'aire du triangle RVB peut s'exprimer de deux façons :

$$\mathcal{A}(\text{RVB}) = \mathcal{A}(\text{BVC}) + \mathcal{A}(\text{BRC}) + \mathcal{A}(\text{RVC})$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a \times r}{2} + \frac{a \times v}{2} + \frac{a \times b}{2}$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a}{2}(r + v + b)$$

$$r + v + b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Comme $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, on obtient :

$$r + v + b = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}}{2} = 1$$

**Q7 :** Le point ayant les 3 composantes de même valeur vérifie $r = v = b$. Comme $r + v + b = 1$, on a $3r = 1$, donc $r = v = b = \dfrac{1}{3}$.
Ce point est le centre de gravité du triangle équilatéral (intersection des médianes).

**Q8 :** Schéma : L'ensemble des points dont la composante rouge vaut 0,2 est constitué de deux segments parallèles à [BV] situés à distance 0,2 de ce côté. Ces segments relient les points situés à distance 0,2 des autres côtés.

**Q9 :** Les trois zones :

- Zone rouge : $r > v$ et $r > b$ : près du sommet R.
- Zone verte : $v > r$ et $v > b$ : près du sommet V.
- Zone bleue : $b > r$ et $b > v$ : près du sommet B.

Les frontières entre ces zones sont les médianes du triangle, car sur une médiane issue d'un sommet, les distances aux deux côtés adjacents à ce sommet sont égales.
(Représentation colorée sur l'annexe 2)