Exercice 1. Plus fort!

Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes. Certaines montrent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.

1. Les feux de l'amour.

Si Alice n'aime pas Jordan alors Brenda n'aime pas Dan. Si Brenda aime Jordan, alors Alice n'aime pas Jordan. Si Brenda n'aime pas Jordan, alors Brenda n'aime pas Dan. Brenda aime-t-elle Dan ?

2. Retour vers le futur.

Votre oncle a 54 ans. En échangeant les chiffres des unités et des dizaines, il n'a plus que 45 ans. Cet artifice lui fait gagner 9 ans. Plus généralement, envisageons une personne ayant ab années, avec éventuellement $a = 0$ (dans l'exemple ci-dessus, $a = 5$ et $b = 4$).

Q1 : Combien d'années, au maximum, cette facétieuse personne pourrait-elle gagner grâce à ce procédé ?

Q2 : Cette personne pourrait-elle ainsi gagner exactement 30 ans ?

3. Intelligence Administrative.

4 personnes se présentent à l'élection d'un conseil. Tous les votes sont valides et exprimés. Voici les résultats obtenus : Johanna obtient $\frac{1}{4}$ des voix, Jason obtient $\frac{4}{15}$ des voix, Jasmine obtient $\frac{3}{20}$ des voix, et Julie obtient $\frac{1}{3}$ des voix. Qui l'emporte et combien pouvait-il y avoir de votants ?

4. Une moitié de seau pas si bête.

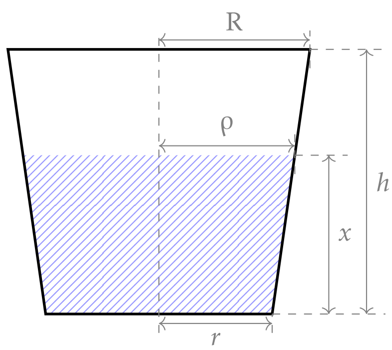
Un seau a la forme d'un tronc de cône de petit rayon r, de grand rayon $\mathrm{R} > r$ et de hauteur totale h.

Q1 : Justifier que son volume total vaut

$$\mathrm{V} = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + \mathrm{R}r + \mathrm{R}^2\right).$$

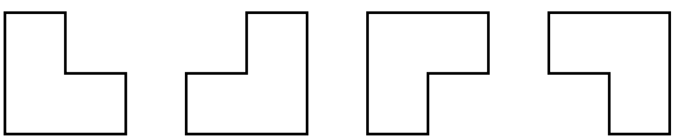
Q2 : On remplit le seau jusqu'à la hauteur x, nombre réel appartenant à l'intervalle $[0, h]$. La surface de l'eau à cette hauteur est un disque de rayon ρ. Déterminer ρ à l'aide de x, r, R et h.

Q3 : On suppose que $r = 1$, $\mathrm{R} = 1,2$ et $h = 2$. À l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée de x de sorte que le seau soit rempli à la moitié de sa capacité.
Pourquoi pouvait-on limiter la recherche autour et au-dessus de la valeur $x = 1$?

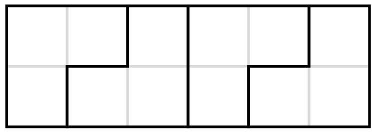


5. Triominos.

Les polygones suivants, formés de trois carrés, sont appelés *triominos* :



On s'intéresse au pavage par des triominos de grilles (ou, en b. et c. de morceaux de grilles) de format $a \times b$, où a désigne leur nombre de lignes et b leur nombre de colonnes. La figure ci-contre montre un exemple de pavage d'une grille dans le cas où $a = 2$ et $b = 6$.



Soit n un entier naturel non nul.

Q1 : Est-il possible de paver une grille de format $2^n \times 2^n$?

Q2 : On retire le carré en haut à gauche d'une telle grille (exemple ci-contre avec $n = 2$). Démontrer qu'il est alors possible de paver cette grille ainsi modifiée (on commencera par les cas $n = 1$ et $n = 2$ avant de généraliser).

Q3 : Démontrer que le résultat précédent reste vrai quand on enlève n'importe laquelle des cases de la grille complète $2^n \times 2^n$ initiale.

6. Sommes harmoniques.

Pour n entier naturel, $n \geqslant 1$, on calcule la somme (dite « harmonique »)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $H_1 = 1$, $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

Q1 : Justifier que $H_4 = \frac{25}{12}$.

Q2 : Proposer un code en langage Python permettant d'obtenir H_n pour tout entier naturel n avec $n \geqslant 1$.

Q3 : On appelle « terme binaire » de H_n l'inverse de la plus grande puissance de deux figurant parmi ses termes à sommer. Ainsi, le terme binaire de H_2 est $\frac{1}{2}$, celui de H_3 aussi ; le terme binaire de H_8 est $\frac{1}{8}$, celui de H_9, de H_{10}, …, H_{15} aussi, etc. Quel est le terme binaire de H_3 ? De H_5 ? De H_{20} ?

Q4 : On remarque, après quelques essais, que les valeurs de H_n ne semblent jamais être entières dès que $n \geqslant 2$. Démontrer-le à l'aide, notamment, du terme binaire de H_n.

Exercice 2. Nombres super premiers

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel non nul qui possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même. Ainsi, on rappelle que ni 0 ni 1 ne sont premiers.
On rappelle aussi qu'il existe une infinité de nombres premiers, que l'on peut ensuite ordonner : le plus petit des nombres premiers est 2, on le note p_1 ; le suivant est 3, on le note p_2 et ainsi de suite. On notera ainsi p_n le n-ième nombre premier. On donne, à titre d'illustration, la liste ordonnée (de p_1 à p_{15}) des quinze premiers nombres premiers :

$$p_1 = 2;\ p_2 = 3;\ p_3 = 5;\ p_4 = 7;\ p_5 = 11;\ p_6 = 13;\ p_7 = 17;\ p_8 = 19;\ p_9 = 23;\ p_{10} = 29,$$

$$p_{11} = 31;\ p_{12} = 37;\ p_{13} = 41;\ p_{14} = 43;\ p_{15} = 47.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\pi(n)$ ou plus simplement π_n le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. On signale que cette notation, $\pi(n)$ ou π_n, est usuelle dans ce contexte, mais n'a rien à voir avec le nombre π de la géométrie du cercle.

Étude de la suite $(\pi_n)_{n\geqslant 0}$

Q1 : Justifier que $\pi_0 = 0$ et $\pi_5 = 3$. Combien valent $\pi_1, \pi_2, \pi_6, \pi_{29}, \pi_{47}$ et π_{46} ?

Q2 : Démontrer que la suite $(\pi_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, c'est-à-dire que, pour tout naturel n, $\pi_n \leqslant \pi_{n+1}$.

Q3 : Démontrer que si p et q sont deux nombres premiers tels que $p < q$, alors $\pi_p < \pi_q$.

Q4 : Démontrer que pour tout entier naturel n, $\pi_n \leqslant n$. Pour quel(s) entier(s) n a-t-on $\pi_n = n$?

Suite des itérés de m par π

Pour m entier naturel, on appelle suite des itérés de m par π la suite de nombres formée par m ; le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à m ; le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux au nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à m ; etc. Ainsi, la suite des itérés de m par π est-elle $\big(m; \pi(m); \pi(\pi(m)); \pi(\pi(\pi(m))); \dots\big)$.

Q1 : Calculer les 7 premiers termes de la suite des itérés de m dans les cas particuliers où $m = 5$ puis où $m = 11$.

Q2 : Démontrer que, de manière générale, la suite des itérés d'un entier naturel m est toujours décroissante, et devient nulle à partir d'un certain rang.

Entiers super premiers

Un entier naturel m tel que $m \geqslant 2$ est dit **super premier** si, dans la suite des itérés de m par π, tous les termes différents de 0 et de 1 sont des nombres premiers. En particulier, un super premier est premier.

Q1 : Parmi les nombres 2, 3, 5, 7 et 11, lesquels sont super premiers ?

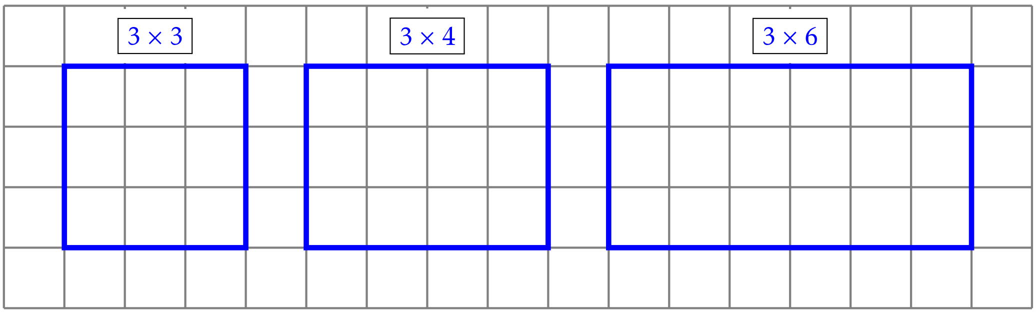
Q2 : Soit n un entier naturel non nul. Supposons avoir construit les n plus petits entiers super premiers $s_1 < \cdots < s_n$. Montrer que le super premier suivant est le nombre premier p tel que $\pi(p) = s_n$.

Q3 : Donner le cinquième plus petit nombre super premier.

Exercice 3. Triominos (bis)

Pavages par des triominos

On revient ici sur les pavages par des triominos (cf. 5. de l'exercice 1) de grilles (ici, complètes) $a \times b$ rectangulaires, puis carrées, sur lesquels on se pose des questions complémentaires.
Il est recommandé de dessiner sur sa copie les grilles au stylo, mais les triominos au crayon de papier. On pourra s'aider, comme brouillon, des grilles déjà tracées figurant dans l'énoncé.



Q1 : Représenter un pavage d'une grille dans le cas où $a = 3$ et $b = 4$.

Q2 : **(a)** On suppose que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$ (on la dit alors « pavable »). Montrer que l'entier ab est divisible par 3.

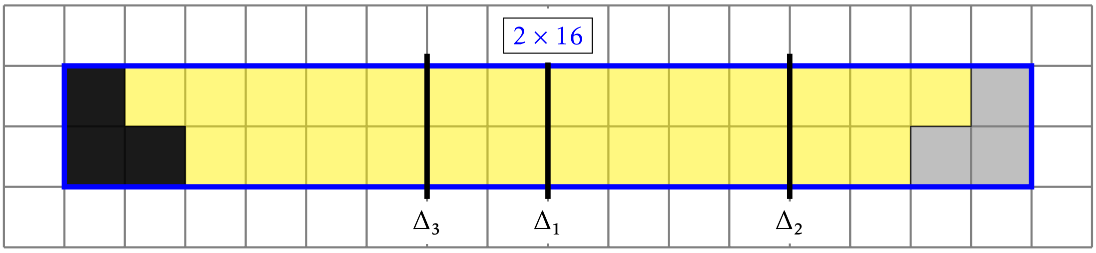
(b) Trouver la plus petite grille carrée pavable de taille $a \times a$.

(c) La condition « ab est divisible par 3 » est-elle suffisante pour garantir qu'une grille de taille $a \times b$ soit pavable ?

Q3 : On suppose que $a = 2$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur b une grille de taille $2 \times b$ est-elle pavable ?

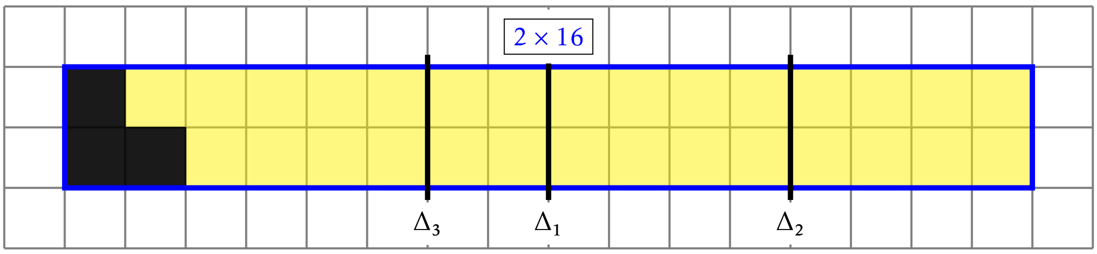
Q4 : Travaux manuels.

Sur l'un des bandeaux 2×16 ci-dessous, on a symétrisé le triomino encré en noir par rapport à l'axe Δ_1, cela a donné le triomino teinté en clair à l'autre bout. On symétrise ce nouveau triomino par rapport à l'axe Δ_2, puis le nouveau-nouveau triomino par rapport à Δ_3.



(a) Dessiner sur votre copie à l'échelle 1/2 le bandeau et les 4 triominos (dont celui d'origine) en présence.

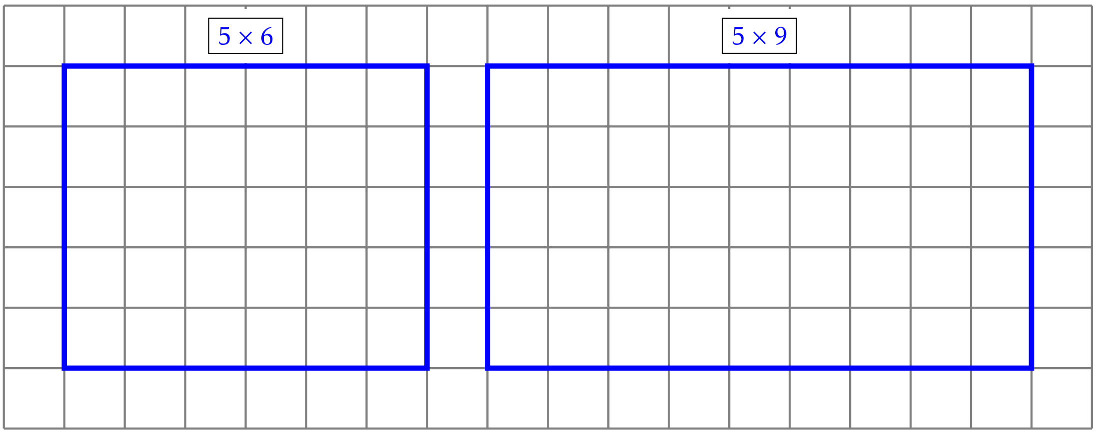
(b) Découper un bandeau (à l'échelle 1) de l'énoncé, remplacer chaque symétrie par un pliage en faisant en sorte que le triomino noir soit toujours visible. Enfin découper selon ses traits. On obtient une farandole de 8 triominos identiques. Pourquoi ? *Le deuxième bandeau en fournit aussi 8.*



Q5 : On suppose dans cette question que $a = 5$. On s'aidera au besoin des 16 petits triominos qu'on disposera sur les grilles ad-hoc pour ses tests au brouillon.

(**a**) Représenter un pavage convenable d'une grille quand $b = 6$.

(**b**) Représenter un pavage convenable d'une grille quand $b = 9$.



(**c**) On suppose b divisible par 3, $b \geq 6$. Montrer que l'on peut paver une grille de taille $5 \times b$.

Q6 : On suppose que b est divisible par 3 et que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$. Montrer que l'on peut alors paver une grille de taille $(a+2) \times b$.

Q7 : On suppose que $a \geq 4$, et $b \geq 4$. Montrer que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$ si, et seulement si, ab est divisible par 3. En déduire les grilles carrées que l'on peut paver.

Corrigé de l'exercice 1 : Plus fort !

Exercice 1 – Plus fort !

1. Les feux de l'amour.

Il y a deux cas.

- Si Brenda aime Jordan, alors Alice n'aime pas Jordan, donc Brenda n'aime pas Dan.
- Si Brenda n'aime pas Jordan, alors Brenda n'aime pas Dan par la troisième implication.

Dans tous les cas, Brenda n'aime pas Dan. Ainsi
$\boxed{\text{Brenda n'aime pas Dan.}}$

2. Retour vers le futur.

Une personne ayant $\overline{ab}$ ans a en réalité l'âge

$$10a + b,$$

et, après inversion des chiffres, elle aurait

$$10b + a$$

ans. Le gain est donc

$$(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b).$$

- Le gain est toujours un multiple de 9. Il est maximal lorsque $a - b$ est maximal, c'est-à-dire pour $a = 9$ et $b = 0$. On obtient alors

  $$9(9 - 0) = 81.$$

  Donc le gain maximal est $\boxed{81 \text{ ans}}$.
- Comme tout gain est un multiple de 9, on ne peut pas obtenir exactement 30 ans, car 30 n'est pas divisible par 9. Donc $\boxed{\text{non, 30 ans sont impossibles}}$.

3. Intelligence administrative.

Mettons toutes les fractions au même dénominateur :

$$\frac{1}{4} = \frac{15}{60}, \quad \frac{4}{15} = \frac{16}{60}, \quad \frac{3}{20} = \frac{9}{60}, \quad \frac{1}{3} = \frac{20}{60}.$$

Julie obtient la plus grande part des voix. Elle l'emporte donc.
Par ailleurs, pour que les quatre nombres de voix soient entiers, le nombre total de votants doit être un multiple commun de 4, 15, 20 et 3, donc un multiple de

$$\text{ppcm}(4, 15, 20, 3) = 60.$$

Ainsi $\boxed{\text{Julie l'emporte, et le nombre de votants est un multiple de 60.}}$

4. Une moitié de seau pas si bête.

- On prolonge les génératrices du seau jusqu'au sommet du cône complet. On note y la distance entre la petite base du seau et ce sommet reconstitué. D'après le théorème de Thalès,

  $$\frac{y}{r} = \frac{y+h}{\mathrm{R}}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{rh}{\mathrm{R} - r}.$$

  Le volume du tronc de cône est la différence entre le volume du grand cône et celui du petit cône :

  $$\mathcal{V} = \frac{\pi}{3}\mathrm{R}^2(y+h) - \frac{\pi}{3}r^2 y.$$

  En remplaçant y par $\dfrac{rh}{\mathrm{R}-r}$, on obtient

  $$\boxed{\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + r\mathrm{R} + \mathrm{R}^2\right)}.$$

- Si le seau est rempli jusqu'à la hauteur x, le rayon de la surface de l'eau est ρ. Les rayons varient affinement avec la hauteur, donc
$$\frac{\rho - r}{x} = \frac{R - r}{h}.$$
On en déduit
$$\rho(x) = r + \frac{R-r}{h}x = \frac{rh + x(R-r)}{h}.$$
- Avec $r = 1$, $R = 1,2$ et $h = 2$, on a
$$\rho(x) = 1 + \frac{1.2-1}{2}x = 1 + 0,1x.$$
Le volume d'eau à la hauteur x vaut alors
$$V(x) = \frac{\pi x}{3}(1 + \rho(x) + \rho(x)^2).$$
Le volume total du seau est
$$V = \frac{2\pi}{3}(1 + 1.2 + 1.2^2) \approx 7,6236.$$
On cherche x tel que $V(x) = V/2 \approx 3,8118$. La résolution numérique donne
$$x \approx 1,0902.$$
Pourquoi chercher autour et au-dessus de $x = 1$? Parce que $x = 1$ correspond à la moitié de la hauteur, et comme le seau s'élargit vers le haut, la moitié inférieure contient moins de la moitié du volume. La hauteur cherchée doit donc être un peu supérieure à 1, tout en restant proche de cette valeur puisque le seau n'est que légèrement évasé.

5. Triominos.

- **a**) Une grille $2^n \times 2^n$ contient 4^n cases. Or
$$4^n \equiv 1 \pmod 3.$$
Comme chaque triomino couvre exactement 3 cases, un pavage imposerait que le nombre total de cases soit divisible par 3, ce qui n'est pas le cas. Donc
$$\boxed{\text{une grille } 2^n \times 2^n \text{ n'est jamais pavable.}}$$
- **b**) Si on enlève la case en haut à gauche, il reste $4^n - 1$ cases, et
$$4^n - 1 = (4-1)(1 + 4 + \cdots + 4^{n-1})$$
est bien divisible par 3.
Récurrence.
  - *Cas de base :* Pour $n = 1$, une grille 2×2 privée d'un coin est exactement un triomino. Pour $n = 2$, on obtient un exemple explicite (figure donnée dans l'énoncé).
  - *Hérédité :* On découpe la grille $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ en quatre quadrants $2^n \times 2^n$. On place un triomino central qui recouvre une case de trois des quadrants. Le quadrant contenant la case manquante se retrouve avec une case vide, les trois autres quadrants ont leur coin (celui qui touche le centre) vide. Par hypothèse de récurrence, ils sont pavables.

  Donc $\boxed{\text{une grille } 2^n \times 2^n \text{ privée du coin haut gauche est pavable.}}$
- **c**) Si l'on enlève n'importe quelle case de la grille, on raisonne de la même manière : on découpe la grille en quatre quadrants, puis on place un triomino central dans les trois quadrants qui ne contiennent pas la case retirée. Le quadrant contenant la case retirée relève de l'hypothèse de récurrence « une case quelconque manquante », et les trois autres relèvent du cas b) « un coin manquant ». On obtient donc, par récurrence,
$$\boxed{\text{une grille } 2^n \times 2^n \text{ privée d'une case quelconque est toujours pavable.}}$$

6. Sommes harmoniques.

- **a**)
$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12+6+4+3}{12} = \frac{25}{12}.$$

- **b**) Un code Python possible (calcul exact avec fractions) :

```
from fractions import Fraction

def harmonique(n):
    s = Fraction(0, 1)
    for k in range(1, n + 1):
        s += Fraction(1, k)
    return s
```

- **c**) Le terme binaire de H_n est l'inverse de la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n. Ainsi :

$$H_3 : \frac{1}{2}, \qquad H_5 : \frac{1}{4}, \qquad H_{20} : \frac{1}{16}.$$

- **d**) Soit $n \geqslant 2$, et soit 2^m la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n. Posons

$$L = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n).$$

Alors 2^m divise L, mais 2^{m+1} ne le divise pas. Écrivons

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{L}{L} + \frac{L/2}{L} + \cdots + \frac{L/n}{L}.$$

Le terme correspondant à 2^m est $\dfrac{L/2^m}{L}$, et $L/2^m$ est impair. En revanche, pour tout $k \neq 2^m$, le quotient L/k est pair, car k contient une puissance de 2 strictement plus petite que 2^m. Le numérateur total est donc impair, alors que le dénominateur L est pair. La fraction ne peut donc pas être un entier. Ainsi

$$\boxed{H_n \text{ n'est jamais entier pour } n \geqslant 2.}$$

Corrigé de l'exercice 2 : Nombres super premiers

Étude de la suite $(\pi_n)_{n \geqslant 0}$

Q1 : On lit directement sur la liste des nombres premiers :

$$\pi_0 = 0, \quad \pi_1 = 0, \quad \pi_2 = 1, \quad \pi_5 = 3, \quad \pi_6 = 3,$$
$$\pi_{29} = 10, \quad \pi_{46} = 14, \quad \pi_{47} = 15.$$

Q2 : L'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n est inclus dans l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à $n + 1$. Donc

$$\pi_n \leqslant \pi_{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Q3 : Si $p < q$ sont premiers, alors tous les nombres premiers $\leqslant p$ sont aussi $\leqslant q$, et q lui-même s'ajoute à la liste. Ainsi

$$\pi_q \geqslant \pi_p + 1,$$

d'où

$$\pi_p < \pi_q.$$

Q4 : Il y a au plus n entiers entre 1 et n, donc a fortiori au plus n nombres premiers parmi eux :

$$\pi_n \leqslant n.$$

Pour $n \geqslant 1$, l'entier 1 n'est pas premier, donc en réalité $\pi_n \leqslant n - 1 < n$. La seule égalité possible est donc obtenue pour $n = 0$. Finalement

$$\pi_n = n \iff n = 0.$$

Suite des itérés de m par π

Q1 : Pour $m = 5$, les sept premiers termes sont

$$(5,\ \pi(5),\ \pi(\pi(5)),\ \dots) = (5, 3, 2, 1, 0, 0, 0).$$

Pour $m = 11$, les sept premiers termes sont

$$(11, 5, 3, 2, 1, 0, 0).$$

Q2 : D'après la question 4, pour tout entier $u \geqslant 2$,

$$\pi(u) < u.$$

Ainsi, tant que l'on n'a pas atteint 1 ou 0, chaque itération fait strictement décroître la valeur. On obtient donc une suite décroissante d'entiers naturels, ce qui force, après un nombre fini d'étapes, l'atteinte de 1 ou de 0. Or

$$\pi(1) = 0 \quad \text{et} \quad \pi(0) = 0.$$

Donc la suite des itérés devient nulle à partir d'un certain rang.

Entiers super premiers

Q1 : On calcule les suites d'itérés :

$$2 \to (2, 1, 0, \dots), \quad 3 \to (3, 2, 1, 0, \dots), \quad 5 \to (5, 3, 2, 1, 0, \dots),$$
$$7 \to (7, 4, 2, 1, 0, \dots), \quad 11 \to (11, 5, 3, 2, 1, 0, \dots).$$

Les termes non nuls différents de 1 sont tous premiers pour 2, 3, 5 et 11, mais pas pour 7 à cause du terme 4. Ainsi, 2, 3, 5 et 11 sont super premiers, tandis que 7 ne l'est pas.

Q2 : Soit s_n le n-ième plus petit super premier. Par définition, si p est le super premier suivant s_{n+1}, alors tous ses itérés non nuls différents de 1 sont premiers. En particulier $\pi(p)$ doit être un super premier strictement plus petit, et comme s_n est le plus grand super premier strictement inférieur à s_{n+1}, on a nécessairement $\pi(p) = s_n$. Réciproquement, si p est un nombre premier tel que $\pi(p) = s_n$, alors la suite des itérés de p est $p, s_n, s_{n-1}, \dots, 2, 1, 0$, tous premiers sauf 1 et 0. Donc p est super premier. Ainsi, le super premier suivant est l'unique nombre premier p vérifiant $\pi(p) = s_n$.

Q3 : En appliquant la récurrence précédente :

$$s_1 = 2, \quad s_2 = p \text{ tq } \pi(p) = 2 \implies p = 3, \quad s_3 : \pi(p) = 3 \implies p = 5,$$
$$s_4 : \pi(p) = 5 \implies p = 11, \quad s_5 : \pi(p) = 11 \implies p = 31.$$

Le cinquième plus petit nombre super premier est donc 31. item On montre par récurrence que

$$s_{n+1} = p_{s_n}.$$

Initialisation. On a $s_1 = 2$, et le super premier suivant est $3 = p_2$.
Hérédité. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n - 1$, et soit q le super premier suivant s_n. Comme q est premier, il existe un entier m tel que

$$q = p_m \quad \text{et} \quad m = \pi(q).$$

Or q est super premier, donc $m = \pi(q)$ est lui aussi super premier (c'est le terme suivant dans la suite des itérés de q). Il existe donc un indice $i \leqslant n$ tel que $m = s_i$.
Si $i < n$, alors, par hypothèse de récurrence,

$$q = p_{s_i} = s_{i+1} \leqslant s_n,$$

ce qui contredit le fait que q soit le super premier suivant s_n.
Donc nécessairement $i = n$, et

$$q = p_{s_n}.$$

Q4 : On applique la relation précédente :

$$s_1 = 2, \quad s_2 = p_2 = 3, \quad s_3 = p_3 = 5, \quad s_4 = p_5 = 11, \quad s_5 = p_{11} = 31.$$

Donc

$$s_5 = 31.$$

Q5 : Soit

$$\mathrm{P} = \prod_{\sqrt{\mathrm{N}} < q \leqslant \mathrm{N} \text{ premier}} q.$$

Il y a exactement $\pi(\mathrm{N}) - \pi(\sqrt{\mathrm{N}})$ facteurs dans ce produit, et chacun de ces facteurs est strictement supérieur à $\sqrt{\mathrm{N}}$. Donc

$$\mathrm{P} \geqslant (\sqrt{\mathrm{N}})^{\pi(\mathrm{N}) - \pi(\sqrt{\mathrm{N}})}.$$

Si $\mathrm{N} \geqslant 4^{2(\mathrm{M}+1)}$, alors $\sqrt{\mathrm{N}} \geqslant 4^{\mathrm{M}+1}$, d'où

$$\mathrm{P} \geqslant 4^{(\mathrm{M}+1)(\pi(\mathrm{N}) - \pi(\sqrt{\mathrm{N}}))}.$$

Mais P est un sous-produit de $\mathrm{Q_N}$, donc

$$\mathrm{P} \leqslant \mathrm{Q_N} \leqslant 4^{\mathrm{N}}.$$

Par conséquent

$$4^{(\mathrm{M}+1)(\pi(\mathrm{N}) - \pi(\sqrt{\mathrm{N}}))} \leqslant 4^{\mathrm{N}}.$$

Q6 : En prenant le logarithme en base 4 dans le résultat précédent, on obtient

$$(\mathrm{M} + 1)(\pi(\mathrm{N}) - \pi(\sqrt{\mathrm{N}})) \leqslant \mathrm{N},$$

puis

$$\pi(\mathrm{N}) \leqslant \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M} + 1} + \pi(\sqrt{\mathrm{N}}).$$

Or, d'après la question 4,

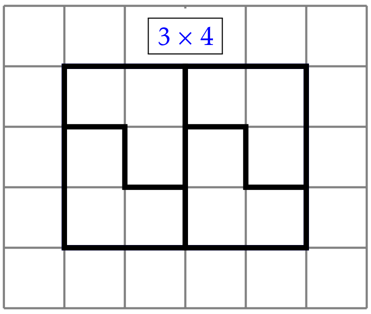
$$\pi(\sqrt{\mathrm{N}}) \leqslant \sqrt{\mathrm{N}}.$$

Donc

$$\pi(\mathrm{N}) \leqslant \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M} + 1} + \sqrt{\mathrm{N}}.$$

Corrigé de l'exercice 3 : Triominos (bis)

Q1 : Voici un exemple de pavage d'une grille 3×4 :



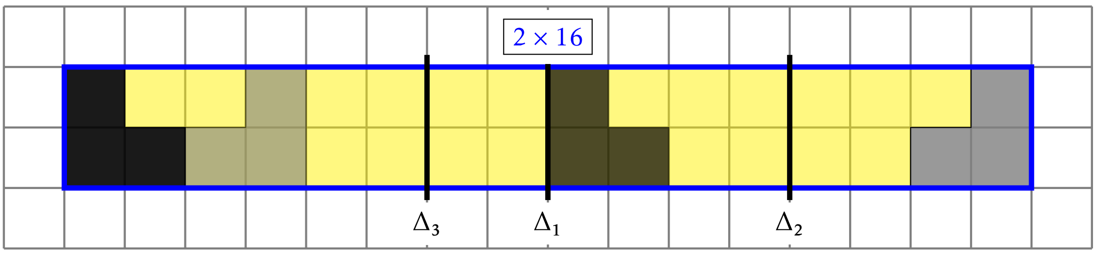
Q2 : **(a)** Si une grille $a \times b$ est pavée par des triominos, alors son aire ab est la somme des aires des triominos utilisés. Chaque triomino a une aire égale à 3. On a donc $3 \mid ab$.

(b) Une grille carrée $a \times a$ a pour aire a^2. La condition nécessaire est $3 \mid a^2$, donc $3 \mid a$. Le plus petit candidat est donc $a = 3$.
La grille 3×3 n'est pas pavable : le triomino qui recouvre un coin est forcé, il en force un second, et il reste trois cases alignées, ce qui n'est pas un triomino en L.
Le candidat suivant est $a = 6$. Une grille 6×6 se pave en la découpant en six rectangles 2×3, chacun étant pavable (deux triominos par rectangle).
La plus petite grille carrée pavable est donc $\boxed{6 \times 6}$.

(c) Non. La condition $3 \mid ab$ n'est pas suffisante : la grille 3×3 a bien une aire multiple de 3 mais n'est pas pavable.

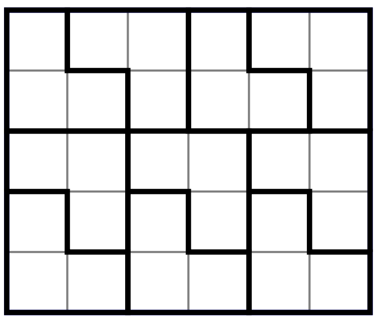
Q3 : Pour $a = 2$, la condition nécessaire est $3 \mid 2b$, donc $3 \mid b$.
Réciproquement, si $3 \mid b$, on découpe la grille $2 \times b$ en $\dfrac{b}{3}$ rectangles 2×3, chacun pavable avec deux triominos.
La condition nécessaire et suffisante est donc :
$\boxed{\text{La grille } 2 \times b \text{ est pavable si et seulement si } 3 \mid b.}$

Q4 : **(a)** Après les trois symétries successives, on obtient quatre triominos suivants sur le bandeau 2×16.

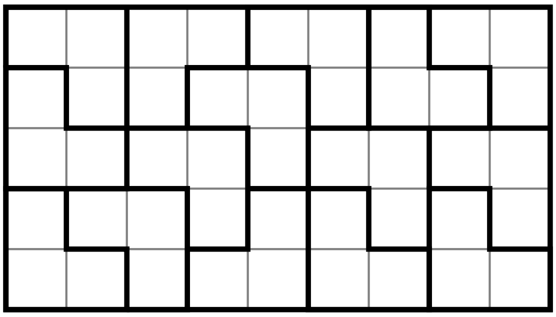


(b) Chaque pliage remplace une symétrie par une superposition. Après le premier pliage, on a 2 épaisseurs ; après le deuxième, 4 ; après le troisième, 8. Le triomino noir restant visible, le découpage selon son contour traverse donc 8 épaisseurs identiques, ce qui produit $2^3 = 8$ triominos identiques. Le deuxième bandeau fonctionne exactement de la même façon.

Q5 : **(a)** Un pavage possible d'une grille 5×6 :



(**b**) Un pavage possible d'une grille 5×9 :



(**c**) Soit b un multiple de 3 avec $b \geqslant 6$. Alors b est de la forme $6k$ ou $6k + 3$ ($k \geqslant 1$).
Si $b = 6k$, on juxtapose k grilles 5×6.
Si $b = 6k + 3$, on juxtapose $(k - 1)$ grilles 5×6 et une grille 5×9.
Ainsi, pour tout $b \geqslant 6$ multiple de 3, la grille $5 \times b$ est pavable.

Q6 : On suppose b multiple de 3 et qu'une grille $a \times b$ est pavable. D'après la question 3, une grille $2 \times b$ est également pavable. En accolant à la grille $a \times b$ une bande $2 \times b$, on obtient un pavage de la grille $(a + 2) \times b$. Donc :

$$a \times b \text{ pavable} \implies (a + 2) \times b \text{ pavable, dès que } 3 \mid b.$$

Q7 : La nécessité a déjà été vue en 2.(a) : si la grille $a \times b$ est pavable, alors $3 \mid ab$.
Réciproquement, supposons $a \geqslant 4$, $b \geqslant 4$ et $3 \mid ab$. Par symétrie, on peut supposer $3 \mid b$ (si ce n'est pas le cas, $3 \mid a$ et on échange les rôles). Comme $b \geqslant 4$ et $3 \mid b$, on a en fait $b \geqslant 6$.
— Si a est pair, on part d'une grille $2 \times b$ (pavable d'après la question 3), puis on applique plusieurs fois la question 6 pour obtenir successivement $4 \times b$, $6 \times b$, ..., jusqu'à $a \times b$.
— Si a est impair, alors $a \geqslant 5$. On part d'une grille $5 \times b$ (pavable d'après la question 5.c), puis on applique plusieurs fois la question 6 pour atteindre $a \times b$.
On a donc démontré :

$$\boxed{\text{Pour } a, b \geqslant 4, \quad a \times b \text{ est pavable} \iff 3 \mid ab.}$$

Pour une grille carrée $a \times a$ avec $a \geqslant 4$, cela devient :

$$a \times a \text{ pavable} \iff 3 \mid a^2 \iff 3 \mid a.$$

En tenant compte de la question 2.(b) (la grille 3×3 n'est pas pavable), les grilles carrées pavables sont exactement :

$$\boxed{a \times a \text{ avec } a \geqslant 6 \text{ et } 3 \mid a.}$$