

♣ Baccalauréat C Orléans-Tours juin 1981 ♣

EXERCICE 1

On note \bar{x} la classe d'un entier naturel x selon la relation de congruence modulo 10.

1. Expliciter l'ensemble C des classes des entiers n^2 quand n décrit l'ensemble \mathbb{N} des naturels.
2. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 on ait

$$\overline{(n!)} = \bar{0}.$$

(On rappelle que pour tout entier naturel n non nul $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et que $0! = 1$).

3. Pour n entier non nul on pose $u_n = 1! + 2! + 3! + \cdots + n!$.
Déterminer l'ensemble D des entiers naturels n tels que u_n soit un carré parfait.

EXERCICE 2

1. Soit φ la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$\varphi(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

- a. Déterminer l'ensemble de définition de φ .
- b. Étudier la continuité et la dérivabilité de φ sur son ensemble de définition.

$$\text{Étudier } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1}.$$

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2. a. Montrer qu'il existe une fonction f définie et continue sur $[-1; 1]$ et telle que

$$\forall x \in [-1; 0[\cup]0; 1], \quad f(x) = \varphi(x).$$

- b. Cette fonction f est-elle dérivable en 0?
3. Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 1]$. On précisera en particulier $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

PROBLÈME

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E .

Si \vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs, on notera $D_{\vec{u}}$ la droite vectorielle de base \vec{u} , $P_{(\vec{u}; \vec{v})}$ le plan vectoriel de base (\vec{u}, \vec{v}) .

Partie A

1. Quelle est l'image de la base \mathcal{B} par la projection orthogonale sur $P_{(\vec{u}; \vec{v})}$? On notera p cette projection.
2. On considère le plan vectoriel $P_{(\vec{i}, \vec{k})}$ orienté par \vec{j} .
 - a. Montrer que la base (\vec{k}, \vec{i}) de ce plan est alors orientée dans $P_{(\vec{i}, \vec{k})}$.
 - b. Déterminer la matrice dans (\vec{k}, \vec{i}) de la rotation vectorielle p_α de ce plan, de mesure α en radians (α étant un réel de $[0; \pi]$).
Exprimer, en fonction de \vec{i} et \vec{k} , les images des vecteurs \vec{i} et \vec{k} par cette rotation vectorielle.
 - c. En déduire l'image de la base \mathcal{B} par la rotation vectorielle r_α de E, d'axe $D_{\vec{j}}$ orienté par \vec{j} et de mesure α en radians.
3. Soit Q_α l'image du plan vectoriel $P_{(\vec{i}, \vec{j})}$ par la rotation vectorielle r_α .
 - a. Déterminer la base de Q_α , image de (\vec{i}, \vec{j}) par la rotation vectorielle r_α . $r_\alpha(\vec{i})$ sera noté \vec{u} .
 - b. Déterminer l'image de la base \mathcal{B} par q , projection vectorielle orthogonale de E sur Q_α .
 - c. Vérifier que $r_\alpha \circ p = q \circ r_\alpha$.
 - d. Montrer que dans la base \mathcal{B} , le vecteur de composantes $(x; y; z)$ a pour image par $q \circ p$ le vecteur de composantes $(x \cos^2 \alpha; y; -x \cos \alpha \sin \alpha)$.
4. Soit \vec{u} le vecteur défini en 3. a.
 - a. Montrer que $(q \circ p)(\vec{u}) = (\cos^2 \alpha) \cdot \vec{u}$.
 - b. Discuter selon les valeurs de α la nature de l'application

$$h: \begin{array}{ccc} D_{\vec{u}} & \rightarrow & D_{\vec{u}} \\ \vec{x} & \mapsto & (q \circ p)(\vec{x}). \end{array}$$

- c. Montrer que l'image, par $q \circ p$, du plan vectoriel Q_α est incluse dans Q_α .
5. a. Déterminer, dans la base (\vec{u}, \vec{j}) , la matrice de l'application linéaire

$$f: \begin{array}{ccc} Q_\alpha & \rightarrow & Q_\alpha \\ \vec{x} & \mapsto & (q \circ p)(\vec{x}). \end{array}$$

- b. Déterminer la valeur de α pour laquelle f n'est pas bijective. Que peut-on dire alors de $P_{(\vec{i}, \vec{j})}$ et Q_α ?

Partie B

Soit \mathcal{E} un espace affine associé à E et rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{B} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $\overline{Q_\alpha}$ le plan affine de direction Q_α et contenant le point O.

Soit φ l'application de \mathcal{E} qui au point M de coordonnées $(x; y; z)$ dans \mathcal{B} fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'; y'; z')$ dans \mathcal{B} telles que

$$\begin{cases} x' = x \cos^2 \alpha \\ y' = y \\ z = -x \cos \alpha \sin \alpha \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in [0; \pi], \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

1. Montrer que l'image de $\overline{Q_\alpha}$ par l'application φ est contenue dans $\overline{Q_\alpha}$.
2. Soit ψ l'application

$$\begin{cases} \overline{Q_\alpha} & \rightarrow & \overline{Q_\alpha} \\ M & \mapsto & \varphi(M). \end{cases}$$

Quelle est l'expression analytique de ψ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{j})$ où

$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} - \sin \alpha \vec{k} ?$$

3. Soit \mathcal{C} la courbe du plan $\overline{Q_\alpha}$ dont les points M , de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{j})$ vérifient

$$9x^2 - 18x + 16y^2 - 32y - 56 = 0.$$

Quelle est la nature de \mathcal{C} ?

Donner le centre et les mesures des axes.

4. Déterminer dans $(O; \vec{u}, \vec{j})$ une équation de $\psi(\mathcal{C})$.

Quelle est la nature de $\psi(\mathcal{C})$?

Donner le centre par ses coordonnées et préciser selon les valeurs de α la mesure du grand axe.

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $\psi(\mathcal{C})$ est un cercle dont on précisera le rayon.