

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat C juin 1982 Orléans-Tours œ

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre dans \mathbb{C} , corps des nombres complexes, l'équation (1)

$$(1) \quad 2(1+i)z^2 + 2(a+i)z + ia(1-i) = 0$$

où z est l'inconnue complexe et a un paramètre réel.

2. À tout nombre complexe z , on associe dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ le point M d'affixe z .

Déterminer l'ensemble E des points, images des solutions de l'équation (1), quand a décrit \mathbb{R} .

3. Quel est l'ensemble transformé de l'ensemble E par la similitude directe plane S , de centre $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, d'angle $\frac{\pi}{4}$, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$?

EXERCICE 2

4 points

\mathcal{E} est un espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On appelle \mathcal{C} le cube de sommets : O, A, B, C, D, E, F, G , défini par

$$\vec{OA} = \vec{i}, \vec{OC} = \vec{j}, \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j},$$

$$\vec{AE} = \vec{OD} = \vec{CG} = \vec{BF} = \vec{k}.$$

1. Dessiner \mathcal{C} ; soit r_1 la rotation de \mathcal{E} , d'axe (OA) dirigé par \vec{i} , dont une mesure de l'angle est $+\frac{\pi}{2}$; soit r_2 la rotation de \mathcal{E} , d'axe (OC) dirigé par \vec{j} , dont une mesure de l'angle est $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $f = r_2 \circ r_1$ et $g = r_1 \circ r_2$.

Montrer que f et g sont des relations de \mathcal{E} , définies par

$$f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \quad g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$
$$M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \mapsto f(M) \begin{vmatrix} -y \\ -z \\ x \end{vmatrix} \quad M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \mapsto g(M) \begin{vmatrix} -z \\ -x \\ y \end{vmatrix}$$

(On ne cherchera ni l'axe ni l'angle de chacune des rotations f et g).

2. On note $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1$, les images respectives par f des points A, B, C, D, E, F, G , et $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2$, les images respectives par g des points A, B, C, D, E, F, G .

Montrer que $\{A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1\} = \{A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2\}$.

3. On pose $\varphi = g \circ f^{-1}$. Quelle est l'image \mathcal{C}_2 par φ de la liste ordonnée de points $\mathcal{C}_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1)$?

Montrer que φ est une rotation dont on précisera l'axe.

PROBLÈME**4 points****Partie A**

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$x \mapsto f(x) = x \operatorname{Log} \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$$

où Log désigne la fonction logarithme népérien de base e .

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de f ; étudier la continuité et la dérivabilité de f , en énonçant les théorèmes utilisés.
2. **a.** Étudier la dérivabilité de f' , fonction dérivée de f , et en déduire les variations de f' .
- b.** Soit F la restriction de f' à l'intervalle $I =]-1; 0[$.
Démontrer que F est une bijection de I sur un intervalle à préciser. En déduire que dans I , l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique, notée a ; on ne cherchera pas à calculer a , mais on montrera que $a > 2$.
- c.** Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.
- d.** Des résultats précédents, déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in D_{f'}$ et les variations de f .
3. Déterminer les limites de f aux bornes des intervalles de $D_{f'}$ (on pourra utiliser le changement de variable $X = \frac{1}{x}$).
4. Pour une étude locale de f au voisinage de zéro, on adoptera le plan suivant :
Soit h la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x \neq 0 &\mapsto h(x) = f(x) \\ 0 &\mapsto h(0) = 0. \end{aligned}$$

- a.** Démontrer que h est le prolongement par continuité de f en zéro.
- b.** Étudier la dérivabilité de h en zéro.

Conclusion de la partie A : Donner le tableau de variations de f et construire la courbe (\mathcal{C}) représentative de f dans P plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, en précisant l'intersection de (\mathcal{C}) avec l'axe des abscisses.

Partie B

P est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit s l'application de P dans P définie par

$$s: P \rightarrow P$$

$$M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \mapsto s(M) = M' \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{matrix} -x-1 \\ y \end{matrix}$$

- Déterminer la nature et les points invariants de s .
- Soit (\mathcal{C}') l'image de (\mathcal{C}) par s , (\mathcal{C}) étant la courbe représentative dans P de la fonction f étudiée dans la partie A. Construire (\mathcal{C}') dans le même repère que (\mathcal{C}) .
Soit g la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} admettant (\mathcal{C}') comme courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Calculer $g(x)$ et préciser D_g ensemble de définition de g .
- Résoudre algébriquement dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = g(x)$.

Partie C

- Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) < 1 < g(n)$.

En déduire l'encadrement suivant de e :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Préciser cet encadrement pour $n = 1$. Soit $\ell(n)$ la largeur de cet encadrement c'est-à-dire

$$\ell(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ell(n)$ est majoré par $\frac{4}{n}$ et minoré par $\frac{2}{n}$.

- Donner un rang à partir duquel l'encadrement ci-dessus de e permet d'obtenir une valeur approchée de e à 10^{-3} près, c'est-à-dire

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < 10^{-3}.$$