

❧ Baccalauréat C Orléans-Tours juin 1983 ❧

EXERCICE 1

4 POINTS

On pose : $K = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$.

1. Soit f la fonction de $]1; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \text{Log} \left(x + \sqrt{x^2-1} \right).$$

Calculer la fonction dérivée de f . En déduire la valeur de K .

2. On pose : $J = \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{x^2-1} dx$.

Démontrer que :

$$J = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx - K.$$

Calculer J à l'aide d'une intégration par parties.

EXERCICE 2

4 POINTS

PROBLÈME

12 POINTS

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A

On appelle E un espace affine euclidien orienté de dimension 3 associé à un espace vectoriel V , et $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de E .

Partie A

Soit φ l'endomorphisme de V défini par :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{6}}{4}\vec{j} - \frac{\sqrt{6}}{4}\vec{k} \\ \varphi(\vec{j}) = -\frac{\sqrt{6}}{4}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k} \\ \varphi(\vec{k}) = \frac{\sqrt{6}}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k} \end{cases}$$

1. **a.** Soit \vec{u} un élément de V de coordonnées $(x; y; z)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Calculer en fonction de x, y, z les coordonnées x', y', z' de $\varphi(\vec{u})$ dans la même base.

b. Démontrer que φ est une rotation vectorielle de V dont on précisera l'axe Δ .
2. Soit \vec{K} le vecteur de V défini par : $\vec{K} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k})$.

a. Vérifier que \vec{K} est un vecteur unitaire de Δ .

b. On pose : $\vec{I} = \vec{i}$ et $\vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} - \vec{k})$.

Démontrer que (\vec{I}, \vec{J}) est une base orthonormée du plan vectoriel Π orthogonal à Δ .

On admettra alors que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base orthonormée directe de V .

On choisit d'orienter Π en convenant que la base (\vec{I}, \vec{J}) est directe.

c. On rappelle que :

- Π est globalement invariant par φ ;

- l'application φ' de Π dans Π telle que, pour tout vecteur \vec{u} de Π ,

$\varphi'(\vec{u}) = \varphi(\vec{u})$ est une rotation de Π . Donner une mesure de l'angle de φ' .

3. m étant un réel, on définit l'application affine f_m de E , d'endomorphisme associé φ , telle que l'image de O soit le point de coordonnées : $(0; \frac{m^2-4}{4}; \frac{m+2}{4})$.

Calculer les valeurs de m pour lesquelles f_m est une rotation affine. Déterminer dans chaque cas l'axe de la rotation par un point et un vecteur directeur.

Partie B

Soit P un plan affine euclidien orienté admettant le repère orthonormé direct $(O; \vec{I}, \vec{J})$, repère qui sera noté \mathcal{R} .

1. On appelle F la fonction numérique, de variable réelle, définie par :

$$F(x) = x\sqrt{3} + \sqrt{4x^2 - 1}.$$

Soit (C) sa courbe représentative dans P , rapporté à \mathcal{R} .

a. Étudier les variations de la fonction F .

b. Démontrer que (C) admet deux asymptotes que l'on déterminera.

c. Étudier l'existence de tangentes à la courbe (C) aux points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

d. Calculer l'abscisse du point d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses. Construire la courbe (C) .

2. Soit (C') la courbe symétrique de la courbe C par rapport à l'origine.

a. Déterminer une équation de C' dans \mathcal{R} , et construire (C') sur le même graphique que C .

b. Démontrer qu'une équation de la courbe : $(H) = C \cup C'$ est :

$$y^2 - x^2 - 2\sqrt{3}xy + 1 = 0.$$

Partie C

Soit g la rotation affine du plan P , de centre O et dont une mesure de l'angle, exprimée en radians, est $\frac{\pi}{3}$.

1. Quelle est l'expression analytique de g dans \mathcal{R} ?
2. **a.** Déterminer une équation de (H') , image de (H) par la rotation g .
b. Quelle est la nature de (H') ?
Préciser le centre, les asymptotes, les foyers de (H') .
3. **a.** Soit (K) une hyperbole, F_1 et F_2 ses foyers.
Démontrer que l'image de (K) par une isométrie affine h est une hyperbole de foyers $h(F_1)$, $h(F_2)$.
b. En déduire la nature de (H) , les coordonnées de ses foyers. Placer ces points sur la figure du B 2.