**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat C Orléans–Tours juin 1972 ∾

## EXERCICE 1

On considère l'ensemble, E, des entiers relatifs x qui vérifient simultanément

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv 2 \pmod 5, \\ x \equiv 2 \pmod 7, \\ x \equiv 2 \pmod 9. \end{cases}$$

Indiquer la forme générale des éléments de E et déterminer les éléments de E qui sont compris entre $(-1\,000)$ et $(-500)$.
Quel est le plus grand commun diviseur (P.G.C.D.) de deux éléments consécutifs de E ?

## EXERCICE 2

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la nature de la courbe $(C)$, ensemble des points $M$, de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que

$$3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0.$$

   Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (éléments de symétrie, foyers, directrices), la représenter dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
2. Au point $M$ de $(C)$, de coordonnées $(x\,;\,y)$, on associe le nombre complexe $z = x + \text{i}y$, affixe de $M$.
   Calculer le module de $z$, en fonction uniquement
   **a.** de l'abscisse, $x$, de $z$,
   **b.** d'un représentant, $\theta$, de l'argument de $z$.
   Soit $M'$ et $M''$ les points de $(C)$ ayant pour affixes $z'$ et $z''$ d'arguments représentés respectivement par $\theta$ et $\theta + \pi$ $(-\pi < \theta \leqslant \pi)$.
   Calculer la longueur du segment $\left[M'M''\right]$, c'est-à-dire la distance des points $M'$ et $M''$, en fonction de $\theta$.

## PROBLÈME

On rappelle que l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, noté $F$, muni

— d'une loi de composition interne (addition des fonctions numériques) :

$$(\forall f \in F)(\forall g \in F)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad [(f+g)(x) = f(x) + g(x)];$$

— d'une loi de composition externe (multiplication par un réel) :

$$(\forall f \in F)(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad [(\lambda f)(x) = \lambda f(x)),$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On désigne par E l'ensemble des applications $\varphi$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\varphi(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}, \quad a \text{ et } b \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

Un élément de E est donc déterminé par la donnée d'un couple $(a~;~b)$ de réels. On note $\varphi_1$ l'application correspondant au couple (1 ; 0) et $\varphi_2$ celle correspondant au couple (0 ; 1).

**1.** **a.** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $F$ et que $\left(\varphi_1~;~\varphi_2\right)$ est une base de E.

**b.** Démontrer que la partie, $A$, de E formée des fonctions $\varphi$ monotones (au sens large) sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E, dont on indiquera une base.

Montrer que toute application $\varphi$ non nulle, de $A$ possède une application réciproque, $\varphi^{-1}$.
Expliciter $\varphi^{-1}$ et préciser son ensemble de définition.

**2.** À toute fonction $\varphi$ de E, on fait correspondre $\ell(\varphi) = \varphi + \varphi'$ ($\varphi'$ étant la fonction dérivée de $\varphi$.

**a.** Démontrer que $\ell$ est une application linéaire de E vers E. Quel est l'espace vectoriel $\ell$(E), image de E, par cette application ? Donner la matrice $L$ de $\ell$ dans la base $\left(\varphi_1~;~\varphi_2\right)$.

**b.** Déterminer le noyau de $\ell$ et l'ensemble des éléments de E invariants par $\ell$.

**3.** **a.** On suppose $a$ et $b$ rationnels. Calculer une primitive de la fonction 'il définie par

$$\varphi(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$$

et déterminer les rationnels $a$ et $b$ tels que

$$\int_{-1}^{0} (ax+b)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -1.$$

**b.** Étudier la fonction $\varphi_1$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

Tracer la courbe représentative $(C)$ de $\varphi_1$ dans un système d'axes orthonormé $(x'\mathrm{O}x,~y'\mathrm{O}y)$.
Calculer la moyenne de $\varphi_1$ sur l'intervalle fermé [-1 ; 0].
Déterminer l'aire comprise entre la courbe $(C)$, la droite $(x'x)$, la droite $(y'y)$ et la droite d'équation $x = h$, $h$ étant une constante positive.
Quelle est la limite de cette aire quand $h$ tend vers $+\infty$ ?