

œ Baccalauréat C Orléans-Tours septembre 1972 œ

EXERCICE 1

1. Déterminer l'ensemble des couples de nombres entiers naturels, solutions de l'équation

$$(1) \quad (4x - 3y - 5)(4x + 2y - 1) = 0.$$

2. Déterminer l'ensemble des couples $(x ; y)$, solutions de l'équation (1), et tels que le P.G.C.D. des nombres x et y soit égal à 5.

EXERCICE 2

En intégrant par parties, calculer

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

Donner une valeur approchée de A avec deux décimales exactes.

PROBLÈME

Partie A

Le plan affine euclidien \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application de \mathcal{P} dans lui-même qui, à tout point M de coordonnées $(x ; y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $(x' ; y')$, telles que

$$\begin{cases} x' &= ax + by + c, \\ y' &= bx - ay + d \end{cases}$$

a, b, c et d étant des nombres réels. Dans tout le problème on supposera $(a ; b) \neq (0 ; 0)$.

1. Déterminer c et d , en fonction de a et de b , pour que le point $\omega(1 ; 0)$ soit invariant. On notera $T_{a, b}$ la transformation ponctuelle de \mathcal{P} ainsi définie.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par $T_{0, 1}$ et démontrer que $T_{0, 1}$ est une isométrie, que l'on précisera.
3. Montrer que toute transformation $T_{0, b}$ est la composée de $T_{0, 1}$ et d'une transformation simple, que l'on précisera. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $T_{0, b}$.

Partie B

Soit (P) le plan vectoriel euclidien associé au plan affine \mathcal{P} . Le bipoint (M, N) étant un bipoint quelconque dans le plan \mathcal{P} , M' et N' les transformés par $T_{a,b}$ des points M et N , on considère l'application φ , de (P) dans lui-même qui, à tout vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$, fait correspondre le vecteur $\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{M'N'}$.

1. a. Montrer que φ est une application linéaire bijective, dont on précisera la matrice relativement à la base (\vec{i}, \vec{j}) .
- b. Montrer que

$$\forall \vec{u} \in (P), \quad \|\varphi(\vec{u})\| = \lambda \|\vec{u}\|,$$

λ étant un nombre réel, que l'on déterminera, en fonction de a et de b .

2. Soit h l'homothétie vectorielle de rapport $\frac{1}{\lambda}$; montrer que l'application composée $\varphi \circ h$ est une isométrie vectorielle (ou transformation orthogonale).
En déduire que l'application φ est la composée dans un ordre quelconque d'une isométrie vectorielle et d'une homothétie vectorielle de rapport positif.
3. Montrer qu'il existe deux droites vectorielles orthogonales (Δ_1) et (Δ_2) , globalement invariantes par φ .
Soit \vec{v}_1 et \vec{v}_2 deux vecteurs non nuls appartenant respectivement à (Δ_1) et à (Δ_2) , écrire la matrice de φ relativement à la base (\vec{v}_1, \vec{v}_2) .
4. Utiliser l'étude précédente pour définir, avec précision, la transformation $T_{a,b}$.

Partie C

Dans toute cette partie, on suppose $a = 1$ et $b = 1$. On note T la transformation ponctuelle de \mathcal{P} correspondante

$$\begin{cases} x_1 &= x + y, \\ y_1 &= x - y - 1. \end{cases}$$

1. Étudier et représenter graphiquement, dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les fonctions numériques f et g définies par

$$f(x) = x + 1 - 2\sqrt{2x-1} \quad ; \quad g(x) = x + 1 + 2\sqrt{2x-1}.$$

2. On désigne par (C) la réunion des courbes représentatives des fonctions f et g . Déterminer l'équation cartésienne de la courbe (C_1) transformée de (C) par T .
En déduire la nature de (C_1) ; préciser ses éléments caractéristiques.