

∞ Baccalauréat C septembre 1981 Orléans-Tours ∞

EXERCICE 1

1. Déterminer les couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de l'équation

$$5x - 3y = 7.$$

2. Montrer que si (x, y) est une solution de l'équation, alors le plus grand diviseur commun de x et y n'a que deux valeurs possibles.
3. Déterminer les couples (x, y) solutions de l'équation tels que le plus grand diviseur commun de x et y soit égal à la plus grande de ces deux valeurs.

EXERCICE 2

Soit la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1 + e^x}$$

1.
 - a. Étudier les variations de f .
 - b. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
2.
 - a. Montrer que la courbe admet un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées.
 - b. Montrer que f est intégrable sur tout segment de \mathbb{R} .
 - c. À l'aide de remarques géométriques donner un calcul simple de $\int_{-a}^a f(x) dx$ (on rappelle que deux domaines plans isométriques ont même aire).
3.
 - a. Montrer que pour tout x de \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

En déduire une primitive de f .

- b. Retrouver par le calcul le résultat de 2. c.

EXERCICE 3

E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} dont une base est $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On rappelle que l'ensemble des applications linéaires de E dans E , noté $\mathcal{L}(E)$, muni des lois d'addition et de multiplication par un nombre réel habituelles a une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} , que $\mathcal{L}(E)$ muni de l'addition et de la loi de composition des applications, notée \circ , est un anneau commutatif et unitaire.

Pour tout triplet $(a; b; c)$ de réels, on définit l'application linéaire de E dans E notée $\varphi_{(a; b; c)}$ par

$$\begin{cases} \varphi_{(a; b; c)}(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \\ \varphi_{(a; b; c)}(\vec{j}) = c\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k} \\ \varphi_{(a; b; c)}(\vec{k}) = b\vec{i} + c\vec{j} + a\vec{k}. \end{cases}$$

Notations :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{\varphi_{(a; b; c)} \in \mathcal{L}(E); (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\} \\ \omega &= \varphi_{(0; 0; 0)}; \quad \alpha = \varphi_{(1; 0; 0)}; \\ \beta &= \varphi_{(0; 1; 0)}; \quad \gamma = \varphi_{(0; 0; 1)}. \end{aligned}$$

Remarque - Les parties A, B et C du problème sont indépendantes.

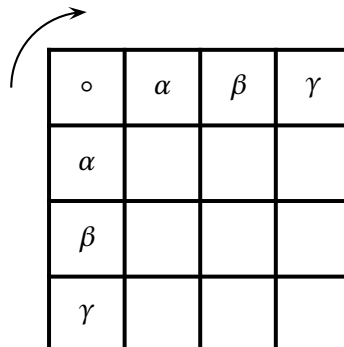
A Structures de \mathcal{F}

1. Démontrer que quels que soient a, b et c réels, $\varphi_{(a; b; c)}$ est une combinaison linéaire de α, β et γ .

En déduire que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Quelle est la dimension de \mathcal{F} ?

2. Reproduire en la complétant la table de composition ci-dessous. (\circ est le symbole de la composition des applications).

Justifier en présentant les calculs.



\circ	α	β	γ
α			
β			
γ			

Démontrer que $(\mathcal{F}, +, \circ)$ est un anneau commutatif, unitaire.

B Noyau et image de $\varphi_{(a; b; c)}$

Notations :

$\varphi_{(a; b; c)}$ est notée φ dans cette partie.

$N(\varphi)$: Noyau de φ ; $I(\varphi)$: image de φ .

D : Droite vectorielle de base $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

P : Plan vectoriel d'équation cartésienne

$$-x + y + z = 0.$$

1. Calculer $\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$.

2. Démontrer que $N(\varphi)$ est l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient le système

$$\begin{cases} ax + cy + bz & = 0 \\ bx + ay + cz & = 0 \\ (a + b + c)(x + y + z) & = 0. \end{cases}$$

Dans le cas où $(a + b + c)$ est non nul démontrer que si $N(\varphi)$ n'est pas réduit au vecteur nul, alors $a = b = c$.

3. Déterminer $N(\varphi)$ et $I(\varphi)$ dans chacun des cas suivants :

1^{er} cas : il existe parmi a, b, c au moins deux réels distincts et la somme $(a + b + c)$ n'est pas nulle.

2^e cas : a, b et c sont tous les trois nuls.

3^e cas : a, b et c sont égaux et non nuls.

4. On suppose qu'il existe parmi a, b, c au moins deux réels distincts et que la somme $(a + b + c)$ est nulle.

Calculer $\varphi(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. Montrer que $\varphi(\vec{i})$ et $\varphi(\vec{j})$ sont deux vecteurs du plan vectoriel P et sont linéairement indépendants.

En déduire $N(\varphi)$ et $I(\varphi)$.

C Dans cette partie on suppose E espace vectoriel euclidien et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base orthonormée directe, on note $\Psi = \varphi(2/3 ; 2/3 ; -1/3)$ et on considère un espace affine \mathcal{E} associé à E de repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, O étant un point de \mathcal{E} .

Soit O' le point de \mathcal{E} de coordonnées $(2/3 ; -1/3 ; 2/3)$ et f l'application affine associée à l'application linéaire Ψ et telle que $f(O) = O'$.

Démontrer que f est un vissage. Quelle est la direction de l'axe du vissage ?

Énoncer une méthode de recherche des éléments caractéristiques du vissage. Déterminer ces éléments caractéristiques.