

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Orléans juin 1969 ∞

EXERCICE 1

Démontrer que le polynôme

$$P(z) = 8z^4 - 8z^2 + 27z - 27$$

peut se mettre sous la forme

$$P(z) = (z - 1)Q(z),$$

$Q(z)$ étant un polynôme du troisième degré, qu'on déterminera.

Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans le corps, \mathbb{C} , des nombres complexes.

Donner le module et l'argument de chacune des racines.

EXERCICE 2

On donne un tétraèdre ABCD.

1. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right) \cdot \overrightarrow{MD} = 3k,$$

k étant un nombre réel donné. Discuter suivant les valeurs de k (on nommera G le centre de gravité du triangle ABC et O le milieu de DG).

2. Déterminer l'ensemble des points P de l'espace tels que

$$\left\| \overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} \right\| = 3 \left\| \overrightarrow{PD} \right\|.$$

PROBLÈME

N. B. - Dans ce problème, $\{-1 ; +1\}$ représente l'ensemble des deux nombres réels -1 et $+1$; $] - 1 ; +1[$ représente l'ensemble des x réels tels que $-1 < x < +1$.

On considère la fonction f qui, à tout $x \in \mathbb{R}$, associe (quand cela est possible) l'image

$$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{3(x^2 - 1)}$$

1. **a.** Étudier les variations de f . Construire le graphe de f dans un système d'axes orthonormé $(x'Ox, y'Oy)$ et montrer qu'il a un centre de symétrie.
b. On désigne par F l'application de $] - 1 ; +1[$ dans \mathbb{R} qui, à tout x de $] - 1 ; +1[$, associe l'image

$$F(x) = f(x) = \frac{x^3 - 9x}{3(x^2 - 1)}$$

(restriction de f à cet intervalle).

Expliquer pourquoi F est une application bijective de $] - 1 ; + 1[$ sur \mathbb{R} . Soit F^{-1} l'application réciproque de F ; montrer que F^{-1} est impaire.

2. On se propose de déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ solutions de l'équation

$$(E) \quad \frac{x^3 - 9x}{3(x^2 - 1)} = \frac{a^3 - 9a}{3(a^2 - 1)},$$

a étant un paramètre donné appartenant à $\mathbb{R} - \{-1; +1\}$.

- a. Résoudre graphiquement l'équation (E) à l'aide de 1. a.
 b. On cherche, dans cette partie, à résoudre algébriquement l'équation (E) rendue entière (équation du troisième degré).

Après avoir remarqué qu'elle a une solution évidente, déterminer les deux autres; simplifier leurs expressions pour les obtenir sous forme de fonctions homogènes de a , soit $u(a)$ et $v(a)$. On choisira

$$u(a) = \frac{a-3}{a+1} \quad \text{et} \quad v(a) = \frac{-(a+3)}{a-1}.$$

3. a. Construire dans un système d'axes orthonormé ($a'\Omega a$, $z'\Omega z$) le graphe de la fonction u qui, à $a \in \mathbb{R} - \{-1; +1\}$, associe l'image $z = u(a)$.
 Remarque que $v(a) = -u(-a)$; en déduire, dans le même système d'axes, le graphe de la fonction v définie de façon analogue.
 b. Expliquer, à l'aide du 2. a., pourquoi la réunion des graphes de u et v n'a pas de points dans le carré

$$-1 \leq a \leq +1, \quad -1 \leq z \leq +1$$

et pourquoi, pour $a < -1$ ou $a > +1$, elle a un point et un seul dans la bande $-1 < z < +1$.

4. On considère la fonction $F^{-1} \circ f$ qui, à $a \in \mathbb{R} - \{-1; +1\}$, associe l'image $F^{-1}[f(a)]$.
 a. Après avoir relu attentivement la définition de F^{-1} , préciser l'ensemble des valeurs de $F^{-1} \circ f$.
 b. Quelle est la partie du graphe de $F^{-1} \circ f$ correspondant à $a \in] - 1 ; + 1[$? On la tracera par rapport aux axes ($a'\Omega a$, $z'\Omega z$) précédents.
 c. Utiliser les graphes de u et v pour représenter la fonction $F^{-1} \circ f$ lorsque $a < -1$ et lorsque $a > +1$.
 d. Le graphe de $F^{-1} \circ f$ est symétrique par rapport à Ω ; pouvait-on le prévoir?