

∞ Baccalauréat C Orléans juin 1971 ∞

EXERCICE 1

Un segment $[AB]$ a pour longueur a . On appelle M_1 le milieu de AB , M_2 le milieu de BM_1 , M_3 le milieu de M_1M_2 , M_4 le milieu de M_2M_3 , M_n le milieu de $M_{n-2}M_{n-1}$.

1. Calculer la longueur AM_n en fonction de n .
2. Montrer que, lorsque n tend vers l'infini, M_n tend vers une position limite, L .

EXERCICE 2

1. Linéariser $f(x) = \sin^4 x$ [c'est-à-dire décomposer $f(x)$ en une somme dont les termes variables sont des sinus ou cosinus de x et de ses multiples].
2. Trouver une primitive de $f(x)$.

PROBLÈME

Partie A

1. Étudier les variations et construire la courbe représentative de la fonction f donnée par

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 3.$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine x_0 ; on ne calculera pas x_0 , mais on montrera que x_0 appartient à l'intervalle $] -1 ; 0[$.

2. Soit la fonction F donnée par

$$F(x) = x^2 - \frac{3x}{x-2}.$$

Déduire, des résultats obtenus dans le paragraphe précédent, le sens de variation de F .

Construire la courbe représentative de la fonction F dans un repère rectangulaire. On ne cherchera pas à préciser la valeur de l'extremum relatif.

Résoudre l'équation $F(x) = 0$.

Partie B

Dans tout ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$ et $y'Oy$ de vecteurs de base \vec{i} et \vec{j} .

On considère l'inversion, I , de pôle O et de puissance $k = 3$, la translation, T , déterminée par le vecteur $\vec{v} = 2\vec{i}$ (le point O a pour image le point d'abscisse 2 de l'axe $x'Ox$) et la transformation, $U = T \circ I$, produit de l'inversion (effectuée d'abord) par la translation T .

On désigne par M_1 l'image par I d'un point M du plan, $M_1 = I(M)$, et par M' l'image par T de M_1

$$M' = T(M_1).$$

1. Démontrer que l'image par U d'un point M appartenant à $x'Ox$ ($M \neq O$) appartient aussi à $x'Ox$. Calculer l'abscisse x' du point M' en fonction de l'abscisse x du point M .
2. Démontrer que la transformation U admet, sur $x'Ox$, deux points doubles A et B .
Calculer les abscisses des points A et B .
Démontrer que les points A et B sont les seuls points doubles de U .
3. Quelle est la nature de la courbe (C') , transformée par U d'un cercle (C) du plan?
4. Trouver l'image par U du cercle de diamètre $[AB]$.

Partie C

Dans ce qui suit, on considère des cercles centrés sur $x'Ox$ et ne passant pas par O . Soit (C) le cercle de centre $P(p; 0)$ et de rayon R , $R \neq |p|$.

L'image par U de (C) est un cercle (C') .

1. Calculer le rayon R' de (C') en fonction de R et de p .
Calculer l'abscisse du centre de (C') en fonction de R et de p .
2. Dans cette question on se propose, en utilisant les résultats relatifs à la fonction F du paragraphe A, d'étudier l'existence de cercles (C) tels que (C) et (C') soient concentriques.
 - a. p étant donné, peut-on trouver R pour que (C) et (C') soient concentriques? Discuter suivant les valeurs de p (calculer R^2 en fonction de p).
 - b. R étant donné, démontrer qu'il existe trois valeurs de p pour lesquelles (C) et (C') sont concentriques.
3. Démontrer qu'il existe des cercles (C) tels que (C) et (C') aient même rayon. Caractériser les familles de cercles (C) ainsi obtenues.
4. Existe-t-il des cercles (C) tels que (C) et (C') soient confondus?