

❧ Baccalauréat C Orléans-Tours juin 1984 ❧

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit la suite numérique $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout n de \mathbb{N}^* par :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx.$$

1. Calculer I_1 .
2. Par intégration par parties, exprimer I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \geq 2$.
En déduire que $I_n = e - \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$ pour $n > 1$.
3. Majorer la fonction $x \mapsto (1-x)^n e^x$ sur l'intervalle $[0; 1]$.
En déduire le limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et montrer que :

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right).$$

N. B. : On rappelle les notations suivantes :

$$0! = 1 ; 1! = 1 ; \text{ pour } n > 1, n! = 1 \times 2 \times \dots \times n.$$

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit k un réel différent de 0 et de 1. On considère trois points A, B et C deux à deux distincts tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et les cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs [AB] et [AC]. Une droite Δ non perpendiculaire à (AB) et distincte de (AB), passant par A, recoupe les cercles Γ_1 et Γ_2 respectivement en M et N.

1.
 - a. Quelle est la position relative des droites (BM) et (CN)?
 - b. Pour quelle valeur de k les droites (BN) et (CM) sont-elles parallèles?
2. On suppose désormais k fixé et différent de -1 . Soit P le point d'intersection des droites (BN) et (CM).
 - a. Soit h l'homothétie de centre P telle que $h(B) = N$.
Démontrer que $h(M) = C$. Calculer le rapport de l'homothétie h en fonction du réel k (on pourra se servir des vecteurs \overrightarrow{BM} et \overrightarrow{NC}).
 - b. Déterminer le réel α tel que

$$\overrightarrow{BP} = \alpha \overrightarrow{BN}.$$

Quel est le lieu géométrique du point P lorsque Δ varie?

En se plaçant dans le cas où $k = 2$ et où la distance AB est égale à 6 cm, donner les éléments géométriques remarquables du lieu géométrique L de P, et faire une figure soignée.

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct du plan.

Soit f_1 la fonction numérique de variable réelle définie par

$$f_1(x) = -2x + \sqrt{3(x^2 - 1)}.$$

1. a. Étudier les variations de f_1 .
- b. Soit \mathcal{C}_1 sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Démontrer que \mathcal{C}_1 admet deux droites asymptotes, passant l'une et l'autre par l'origine et déterminer la position de \mathcal{C}_1 par rapport à ces asymptotes. Préciser les tangentes à \mathcal{C}_1 aux points d'abscisse -1 et 1 . Construire \mathcal{C}_1 (on prendra comme unité : 2 cm).
2. Soit f_2 la fonction numérique de variable réelle définie par

$$f_2(x) = -2x - \sqrt{3(x^2 - 1)}.$$

Montrer que sa courbe représentative \mathcal{C}_2 est l'image de \mathcal{C}_1 par la symétrie de centre O. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ a pour équation

$$x^2 + 4xy + y^2 + 3 = 0.$$

Construire cette courbe que l'on notera \mathcal{C} .

Partie B

1. Soit S la transformation du plan qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{6}}{2}(1+i)z.$$

Caractériser cette transformation. Trouver l'équation de la courbe \mathcal{H} transformée de \mathcal{C} par cette transformation S .

Donner la nature de la courbe \mathcal{H} ainsi obtenue.

2. En utilisant la définition bifocale d'une hyperbole montrer que l'image par une similitude d'une hyperbole est encore une hyperbole. En déduire que la courbe \mathcal{H} est une hyperbole dont on donnera les foyers (on précisera les coordonnées de ces deux points).