

∞ Baccalauréat C Orléans–Tours septembre 1977 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 21 590 et 9 525.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x pour lesquels on a

$$34x \equiv 2 \pmod{15}.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$21\,590x + 9\,525y = 1\,270.$$

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit \mathcal{P} un plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit M' le transformé d'un point M de \mathcal{P} dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$.

Soit M'' l'image de M' dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = 0$.

Exprimer en fonction des coordonnées $(x$ et $y)$ de M , les coordonnées x'' et y'' de M'' .

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation, t_1 , de \mathcal{P} qui à M associe M'' .

Retrouver géométriquement ce résultat.

2. Soit t_2 la transformation de \mathcal{P} qui à $M(x; y)$ associe $N(X; Y)$ tel que

$$\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$$

Caractériser la transformation t_2 , puis la transformation $t_2 \circ t_1$.

PROBLÈME

4 POINTS

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2. On désigne par \mathcal{F} l'ensemble des endomorphismes φ de E qui possèdent les propriétés suivantes :

$$\forall \vec{u} \in E, \quad \forall \vec{v} \in E, \quad \varphi(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \varphi(\vec{v}) \cdot \vec{u}.$$

$(\varphi(\vec{u}) \cdot \vec{v})$ désigne le produit scalaire du vecteur $\varphi(\vec{u})$ et du vecteur \vec{v} .

Partie A

On suppose que (\vec{i}, \vec{j}) est une base orthonormée de E .

1. Montrer qu'un endomorphisme φ de E appartient à \mathcal{F} si et seulement si on a

$$\varphi(\vec{i}) \cdot \vec{j} = \varphi(\vec{j}) \cdot \vec{i}.$$

2. Montrer qu'un endomorphisme φ de E de matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ relativement à la base (\vec{i}, \vec{j}) , est un élément de \mathcal{F} si et seulement si $b = c$.
3. a. Soit φ un élément de \mathcal{F} de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ relativement à la base (\vec{i}, \vec{j}) .

Montrer que si φ est involutive alors φ est une isométrie vectorielle.

Dans le cas $b = 0$ on caractérisera chacune des applications ainsi obtenues.

Dans le cas $b \neq 0$ on précisera la nature de l'application φ .

- b. Déterminer l'endomorphisme involutif φ_0 de \mathcal{F} tel que

$$\varphi_0(2\vec{i} - \vec{j}) = \frac{2}{5}\vec{i} + \frac{11}{5}\vec{j}.$$

(On donnera la matrice de φ_0 , puis les éléments caractéristiques de φ_0).

Partie B

1. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$g(x) = \frac{5}{2}x + 3\sqrt{x^2 - 4}.$$

Étudier les variations de cette fonction. Construire sa représentation graphique (C), dans un plan affine \mathcal{E} , associé au plan vectoriel euclidien E, et rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On montrera que (C) admet deux asymptotes.

2. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -1 .

Déterminer, relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de la courbe (C'), image de la courbe (C) par h , et montrer qu'un point M de coordonnées $(x; y)$ dans ce repère appartient à $(C) \cup (C')$ si et seulement si

$$y^2 - \frac{11}{4}x^2 - 5xy + 36 = 0.$$

3. On désigne par f_0 l'application affine dont l'endomorphisme associé est φ_0 et qui laisse invariant le point O. Montrer que la courbe $(C) \cup (C')$ est globalement invariante par f_0 .

4. Soient $\begin{cases} \vec{I} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} \\ \vec{J} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} \end{cases}.$

Déterminer l'équation de $(C) \cup (C')$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et en déduire la nature de cette courbe.

Retrouver ainsi le résultat de la question 3. précédente.

5. Montrer qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-4} + x$ est la fonction

$$x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{x\sqrt{x^2-4}}{2} - 2\text{Log} \left| x + \sqrt{x^2-4} \right|.$$

Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x$, et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = -2$ relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, α étant un réel strictement inférieur à -2 .