∽ Baccalauréat C Orléans–Tours juin 1979 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On considère le nombre complexe $z = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \text{i}\sin\dfrac{2\pi}{7}$.

1. On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.
   Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.
2. Calculer $S + T$, ST puis en déduire S et T.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. **a.** Trouver tous les couples (p, q) d'entiers relatifs tels que $11p - 9q = 2$.
   b. En déduire les entiers relatifs X qui vérifient

$$\left\{\begin{array}{l c l l} X & \equiv & -1 & [9] \\ X & \equiv & -3 & [11]. \end{array}\right.$$

2. Soit $N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}$ un nombre entier naturel écrit en base dix.
   a. Quelles relations doivent vérifier $a_n a_{n-1} \cdots a_0$ pour que N soit divisible par 99 ?
   b. Déterminer les chiffres x et y pour que l?entier $N = \overline{10x0009y}$ soit divisible par 99.

PROBLÈME **12 POINTS**

Dans tout le problème, P désigne un plan affine euclidien, $\overrightarrow{\text{P}}$ le plan vectoriel associé à P, $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de P.

Partie A

1. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}.$$

   Étudier la continuité et la dérivabilité de g ; en déduire les variations de g, démontrer que g permet de définir une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1~;~0[$.

2. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}.$$

   Étudier la fonction f ; étudier la position de la courbe représentative de f, $\mathcal{C}_f$, par rapport à ses asymptotes, puis construire $\mathcal{C}_f$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   (On représentera l'unité par deux centimètres.)

3. Déduire de l'étude précédente l'existence d'un intervalle E de $\mathbb{R}$, à préciser, tel que f permette de définir une bijection de $\mathbb{R}$ sur E.

Vérifier que la bijection réciproque (que l'on notera abusivement f^{-1}) est telle que, pour tout x de E : $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{4(x-1)} + 1 - x$; tracer la courbe de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ représentant f^{-1} dans $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.

4. Justifier l'existence des réels suivants :

$$A = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x, \quad B = \int_{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x, \quad C = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Calculer B, interpréter graphiquement le réel B.

b. En déduire C, puis A.

Partie B

Dans cette partie, $\overrightarrow{\text{P}}$ est orienté, et $\left(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\imath}\right)$ est une base orthonormé directe.

1. Établir une équation cartésienne de $\mathcal{C}'$, image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie de centre Ω ayant pour coordonnées $(0~;~1)$.

2. En déduire une équation cartésienne de $\text{H} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}_f$ et construire H dans P rapporté au repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.

3. Soit s l'application affine de P dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \left(\cos\frac{\pi}{8} + \text{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)z + \text{i}$.

On note φ l'endomorphisme de $\overrightarrow{\text{P}}$ associé à s.

a. Quelle est la nature de s ? Donner ses éléments caractéristiques.

b. Vérifier que $\Omega = s(\text{O})$; soit $\overrightarrow{I} = \varphi\left(\overrightarrow{\imath}\right)$, $\overrightarrow{J} = \varphi\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$.

Établir une équation cartésienne de H dans le repère $\left(\Omega~;~\overrightarrow{I},~\overrightarrow{J}\right)$.

En déduire la nature de H.