

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Orléans-Tours septembre 1975 ∞

EXERCICE 1

Calculer les racines de l'équation

$$z^8 + z^4 + 1 = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

1. En résolvant le système

$$\begin{cases} z^4 & = u \\ u^2 + u + 1 & = 0 \end{cases}$$

2. En décomposant le polynôme  $z^8 + z^4 + 1$  en un produit de facteurs de degré 2 à coefficients réels (on remarquera que le polynôme  $x^4 + x^2 + 1$  est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels).

EXERCICE 2

1. Étudier et représenter graphiquement dans le plan rapporté à un repère orthonormé la fonction :  $f(x) = \cos^5 x$ ,  $x$  appartenant à l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .
2. Calculer l'aire arithmétique de l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses, la courbe ( $\mathcal{C}$ ) représentant la fonction  $f$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \pi$ .

N. B. : On choisira comme unité sur les axes : 1 cm.

PROBLÈME

Soit  $\pi$  un plan affine, rapporté à un repère  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ ; on note  $f_\alpha$  l'application de  $\pi$  dans  $\pi$  définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' & = x + \alpha \\ y' & = 2\alpha x + y + \alpha^2 - 4\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

et on note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des applications  $f_\alpha$  quand  $\alpha$  décrit  $\mathbb{R}$ .

1.
  - a. Montrer que  $f_\alpha$  est une application affine bijective.
  - b. Montrer que la loi de composition des applications est une loi de composition interne définie dans  $\mathcal{A}$ .
  - c. En étudiant l'application  $\varphi: \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ \alpha & \mapsto & f_\alpha \end{matrix}$ , montrer que  $(\mathbb{R}, +)$  est isomorphe à  $(\mathcal{A}, \circ)$ . En déduire la structure de  $(\mathcal{A}, \circ)$  et les définitions analytiques de  $(f_\alpha)^{-1}$ ,  $f_\alpha \circ f_\alpha$ .
2. Soit  $P$  la parabole d'équation  $y = x^2 - 4x$  dans  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ .

- a. Montrer que si  $M$  appartient à  $P$  il en est de même de  $f_\alpha(M)$ .
- b. Montrer que  $P$  est globalement invariante par  $f_\alpha$  c'est-à-dire que  $P = f_\alpha(P)$ .
3. On note  $M_x$  le point de  $P$  qui a pour abscisse  $x$  et  $T_x$  la tangente à  $P$  en  $M_x$ .
- a. Quelle est l'équation de  $T_0, T_\alpha$  dans  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ ?
- b. Montrer que  $M_\alpha = f_\alpha(M_0)$  et que  $T_\alpha = f_\alpha(T_0)$ .
4. Déterminer  $a, b, c$  réels pour que la parabole d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  dans  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$  soit globalement invariante par  $f_\alpha$ .
5. On note  $g_\beta$  l'application de  $\pi$  dans  $\pi$  définie analytiquement dans  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$  par

$$\begin{cases} x' &= \beta x \\ y' &= 4\beta(\beta-1)x + \beta^2 y, \quad \beta \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

Soit  $B$  l'ensemble des applications  $g_\beta$  quand  $\beta$  décrit  $\mathbb{R}^*$ .

- a. Montrer que  $g_\beta$  est une application affine bijective.
- b. Montrer que  $(\mathbb{R}^*, \times)$  est isomorphe à  $(B, \circ)$ . En déduire la structure de  $(B, \circ)$  et la définition analytique de  $(g_\beta)^{-1}$ .
- Montrer que la parabole d'équation  $y = x^2 - 4x$  dans  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$  est globalement invariante par  $g_{1/3}$ .
6. Chercher les paraboles d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  dans  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$  globalement invariante par  $g_\beta$ .