

## ∞ Baccalauréat C Orléans–Tours septembre 1976 ∞

### EXERCICE 1

$f$  est la fonction réelle de la variable réelle  $x$  définie sur l'intervalle  $I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$  par :

$$f(x) = |x| + \operatorname{tg} x$$

1. Étudier cette fonction et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. Montrer qu'il existe un réel unique  $x_0$  appartenant à  $I$  tel que :

$$f(x_0) = \frac{\pi}{8}.$$

3. Calculer  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ .

Quelle est la valeur moyenne de  $f$  sur l'intervalle  $I$ ?

### EXERCICE 2

On dispose de deux urnes dont l'une contient deux boules marquées 1, deux boules marquées 2 et deux boules marquées 3 et l'autre contient trois boules marquées 1, deux boules marquées 2 et une boule marquée 3.

On tire une boule dans chaque urne et on suppose que chaque couple de boules a la même probabilité d'être tiré.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir 3 comme somme des nombres écrits est  $\frac{5}{18}$ .
2. On considère la variable aléatoire  $X$  qui, à chaque couple de boules, associe la somme des nombres écrits sur ces boules.

Donner la loi de probabilité de  $X$ . Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de  $X$ .

### PROBLÈME

$\mathcal{V}$  étant un espace vectoriel réel, et  $\mathcal{V}'$  et  $\mathcal{V}''$  deux sous-espaces vectoriels donnés de  $\mathcal{V}$ , on se propose d'étudier l'ensemble  $E$  des endomorphismes de  $\mathcal{V}'$  de noyau  $\mathcal{V}''$  et d'image  $\mathcal{V}$ .

#### Partie A

$\mathcal{V}$  est un plan vectoriel de base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ ,  $\mathcal{V}'$  est la droite vectorielle de base

$\vec{v}' = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\mathcal{V}''$  est la droite vectorielle de base  $\vec{v}'' = a\vec{i} + b\vec{j}$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels différents de 0.

1. On suppose  $a \neq b$

- a. Montrer que  $(\vec{v}', \vec{v}'')$  est une base de  $\mathcal{V}$ .

- b. Soit  $p$  la projection vectorielle sur  $\mathcal{V}''$  parallèlement  $\mathcal{V}'$ . Est-ce que  $p$  est élément de  $E$ ?
- c. Soit  $f$  un élément de  $E$ . Écrire sa matrice dans la base  $\mathcal{B}' = (\vec{v}', \vec{v}'')$ . En déduire que  $f$  est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une projection vectorielle que l'on déterminera. Y a-t-il commutativité de la composition?
- d. Démontrer que  $E$  est égal à l'ensemble des endomorphismes  $h \circ p$ , où  $h$  décrit l'ensemble  $\mathcal{H}$  des homothéties vectorielles de  $\mathcal{V}$ .
- e.  $E$  est-il stable pour la loi de composition des applications? Même question pour l'addition des applications.
- f. Montrer que l'application : 
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \rightarrow & E \\ h & \longmapsto & h \circ p \end{array}$$
 est un isomorphisme de groupe, les ensembles  $\mathcal{H}$  et  $E$  étant munis de la loi de composition des applications de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{V}$ . Préciser l'élément neutre de  $(E, \circ)$  et l'élément symétrique d'un élément donné de  $E$ .

2. On suppose  $a = b$

- a. Peut-on définir la projection vectorielle  $p$  de la partie A?
- b. Soit  $f_1$ , l'endomorphisme de  $\mathcal{V}$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que  $f_1$  est élément de  $E$ .

- c. Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathcal{V}$ , de matrice  $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  
Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  pour que  $f$  soit élément de  $E$ .
- d. En déduire que  $E$  est égal à l'ensemble des endomorphismes  $h \circ f_1$ , où  $h$  décrit  $\mathcal{H}$ .  
 $E$  est-il stable pour la loi de composition des applications?

### Partie B

$\mathcal{V}$  est un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3. Si  $f$  est un élément de  $E$ , on notera  $\text{Ker } f = \mathcal{V}'$  et  $\text{Im } f = \mathcal{V}''$ .

1. Donner un exemple de sous-espaces  $\mathcal{V}'$  et  $\mathcal{V}''$  tels que  $E$  soit l'ensemble vide. On supposera dans la suite du problème que  $E$  n'est pas l'ensemble vide.
2.  $f$  et  $g$  étant deux éléments de  $E$  :
- a. Montrer que  $\mathcal{V}' \subset \text{Ker } (g \circ f)$  et  $\text{Im } (g \circ f) \subset \mathcal{V}''$ .
- b. Si  $\mathcal{V}' = \mathcal{V}''$ , montrer que :  $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}, g \circ f(\vec{v}) = 0$ .  
 $E$  est-il stable pour la loi de composition des applications? Rapprocher ce résultat de celui trouvé en première partie 2. d.
- c. Si  $\mathcal{V}'$  et  $\mathcal{V}''$  sont deux sous-espaces supplémentaires de  $\mathcal{V}$ , montrer que quel que soit  $\vec{v}$  appartenant à  $\text{Ker } (g \circ f)$ ,  $f(\vec{v}) = 0$  et montrer que  $\text{Im } (g \circ f) = \mathcal{V}''$ .  $E$  est-il stable pour la loi de composition des applications?

3.  $\mathcal{V}''$  est une droite vectorielle de  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}'''$  un sous-espace supplémentaire de  $\mathcal{V}''$  dans  $\mathcal{V}$ .
- Montrer que pour tout élément  $f$  de  $E$ ,  $f(\mathcal{V}''') \subset \mathcal{V}''$ . En déduire que pour tout vecteur  $\vec{v}$  de  $\mathcal{V}$ ,  $f(\vec{v})$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
  - Démontrer que la restriction de  $f$  à  $\mathcal{V}''$  est une homothétie vectorielle.
  - Démontrer que  $E$  est égal à l'ensemble des endomorphismes  $h \circ p$ , où  $h$  décrit l'ensemble des homothéties vectorielles de  $\mathcal{V}$ ,  $p$  étant la projection vectorielle sur  $\mathcal{V}''$  parallèlement à  $\mathcal{V}'$ .

**N. B.** - Dire que  $E$  est stable pour la loi de composition des applications signifie :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad g \circ f \in E.$$