

∞ Baccalauréat C Orléans–Tours septembre 1979 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\text{Log } x}{x}$$

et tracer sa représentation graphique.

2. Montrer qu'il y a un unique couple $(x ; y)$ d'entiers naturels non nuls tels que :

$$x^y = y^x \quad \text{et} \quad x < y.$$

3. Pour tout entier $n \geq 3$, on pose

$$u_n = \frac{\text{Log } 3}{3} + \frac{\text{Log } 4}{4} + \dots + \frac{\text{Log } n}{n}$$

- a. Comparer u_n à $\int_3^{n+1} f(x) dx$.

- b. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 2

3 POINTS

1. Dans le système décimal, déterminer le chiffre des unités de 2^n et de 7^n , suivant les valeurs de l'entier naturel n .
2. Application : Trouver le chiffre des unités du nombre $3548^9 \times 2537^{31}$?

PROBLÈME

13 POINTS

Les notations et résultats donnés dans l'énoncé du 1 sont utiles dans les questions 2, 3, 4 de B.

Soit j le nombre complexe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On pourra utiliser sans la démontrer l'égalité $1 + j + j^2 = 0$.

Partie A

\mathbb{C} est considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{R} de base $\mathcal{B} = (1 ; i)$.

Soit φ l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui à tout complexe $z = x + iy$ associe le complexe $\varphi(z) = x + jy$.

1. Montrer que φ est une application linéaire bijective.
2. Pour tout z appartenant à \mathbb{C} , on pose $N(z) = |\varphi(z)|^2$.
Montrer que $N(x + iy) = x^2 - xy + y^2$.

3. Soit Ω l'ensemble des complexes z vérifiant $N(z) = 1$.

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}, N(z) = 1\}$$

Soit Ω' l'ensemble des éléments de Ω dont les coordonnées dans \mathcal{B} sont des entiers relatifs.

$$\Omega' = \{z \in \Omega, \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 \quad z = x + iy\}$$

a. Montrer que si $z = x + iy$ appartient à Ω' , alors

$$|x| \leq 1 \quad \text{et} \quad |y| \leq 1$$

b. En déduire que Ω' est formé de six éléments que l'on déterminera.

c. Déterminer $\varphi(\Omega')$. Donner le module et un représentant de l'argument de chaque élément de $\varphi(\Omega')$.

Montrer que $\varphi(\Omega')$ est un groupe multiplicatif commutatif.

Partie B

Soit \mathcal{P} un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (\text{O}; \vec{u}, \vec{v})$. Un point M de \mathcal{P} est repéré par ses coordonnées $(x; y)$ dans \mathcal{R} ou par son affixe $z = x + iy$.

1. Montrer que l'image d'une ellipse de foyers F et F' , de grand axe de longueur $2a$ par une isométrie affine est une ellipse dont on précisera les foyers et la longueur du grand axe.
2. Soit E l'ellipse dont une équation cartésienne dans \mathcal{R} est

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

- a. Déterminer les foyers et la longueur du grand axe de E .
 - b. Trouver une équation cartésienne dans \mathcal{R} de l'image de E par la rotation de centre O et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$ (en radians).
 - c. On appelle Γ (resp. Γ') l'ensemble des points de \mathcal{P} dont l'affixe appartient à Ω (resp. Ω') (Ω et Ω' définis au 1).
Déduire du b. la nature de Γ . Dessiner Γ et Γ' .
3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$$

une matrice à coefficients réels, de déterminant égal à 1.

Soit F l'application affine de \mathcal{P} dans \mathcal{P} telle que $F(\text{O}) = \text{O}$ et dont l'application linéaire associée a pour matrice A dans la base $(\vec{u}; \vec{v})$.

(Si M a pour affixe z , on notera $f(z)$ l'affixe de $F(M)$.)

- a.** Montrer que, pour tout z appartenant à \mathbb{C} , $N(f(z)) = N(z)$. En déduire que $F(\Gamma)$ est inclus dans Γ .
- b.** Montrer que pour tout z appartenant à \mathbb{C} on a

$$\varphi(f(z)) = (a + jb)\varphi(z).$$

En déduire que, pour tout z appartenant à \mathbb{C}

$$(\varphi \circ f \varphi^{-1})(z) = (a + jb)z.$$

- c.** Soit ϕ l'application ponctuelle associée à l'application complexe φ . (Si M a pour affixe z , $\phi(M)$ a pour affixe $\varphi(z)$).
Déduire du b. la nature de l'application $\phi \circ F \circ \phi^{-1}$. En préciser les éléments caractéristiques.
- d.** Soit G une application de \mathscr{P} dans \mathscr{P} . On pose $G^1 = G$ et pour tout n appartenant à \mathbb{N}^* , on a $G^{n+1} = G \circ G^n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que G^n est égale à l'application identique de \mathscr{P} si et seulement si $\phi \circ G^n \circ \phi^{-1}$ est égale à l'application identique de \mathscr{P} .
- 4.** Soit A_0 le point de coordonnées $(1; 0)$ dans \mathscr{R} . Pour tout n appartenant à \mathbb{N}^* , on pose $A^n = F^n(A_0)$.
Soit S l'ensemble des points A^n lorsque n décrit \mathbb{N} .
- a.** Montrer que, si $a = b = 1$, alors $S = \Gamma'$.
- b.** Montrer que S est inclus dans Γ' si et seulement si $a + ib$ appartient à Ω' . Préciser l'ensemble des éléments de Ω' pour lesquels l'inclusion est une égalité.