

## Baccalauréat C juin 1979 Outre-Mer

### EXERCICE 1

**4 points**

Soit  $\alpha, \beta, \gamma$  trois réels donnés, deux à deux distincts;  $a, b, c$  sont trois paramètres réels; on leur associe la fonction numérique  $f$  de variable réelle :

$$x \mapsto f(x) = \frac{ax^3}{x+\alpha} + \frac{bx^3}{x+\beta} + \frac{cx^3}{x+\gamma}$$

1. Former des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur  $a, b, c$ , pour que la fonction  $f$  admette une limite finie quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

(Aucune autre étude concernant la fonction  $f$  n'est demandée).

On posera éventuellement  $h(x) = \frac{a\alpha^3}{x+\alpha} + \frac{b\beta^3}{x+\beta} + \frac{c\gamma^3}{x+\gamma}$ .

2. Trouver  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^3 \left[ \frac{\beta-\gamma}{x+\alpha} + \frac{\gamma-\alpha}{x+\beta} + \frac{\alpha-\beta}{x+\gamma} \right] \right)$ .

3. Considérant à nouveau la fonction  $f$ , montrer que

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0, \quad \text{alors } (a, b, c) = (0, 0, 0)$$

### EXERCICE 2

**4 points**

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x \cos x.$$

1. Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  et mettre  $f'(x)$  sous la forme :

$$f'(x) = Ae^x \cos(x+a),$$

$A$  et  $a$  étant des constantes que l'on calculera,

2. Calculer la dérivée huitième de  $f$ .
3. Déterminer une fonction  $F$  vérifiant :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } F'(x) = f(x), \text{ et } F(0) = \frac{1}{2}.$$

*Application :*

Calculer

$$\int_0^\pi \left( \int_{-\frac{\pi}{4}}^x e^t \cos t \, dt \right) dx.$$

### PROBLÈME

**12 points**

Le plan affine euclidien  $P$  est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , noté  $(\omega)$ . On désigne par  $H$  la courbe du plan  $P$  dont une équation dans  $(\omega)$  est

$$y^2 - 3x^2 = 1.$$

### Partie A

1. Sur une figure réalisée avec l'unité 1 cm, tracer  $H$ .

Soit

$$\vec{u} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i} + \vec{j} \right), \quad \vec{v} = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \vec{i} + \vec{j} \right)$$

Que représentent les droites  $(O, \vec{u})$  et  $(O, \vec{v})$  pour  $H$ ?

(On placera sur la figure les représentants de  $u$  et  $v$  d'origine  $O$ ).

Le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  étant noté  $(\Omega)$ , écrire les relations de passage entre les coordonnées  $x, y$  d'un point  $M$  de  $P$  dans  $(\omega)$  et les coordonnées  $X, Y$  de ce point dans  $(\Omega)$ . Former une équation de  $H$  dans  $(\Omega)$ .

2. On désigne par  $H^+$  la partie de  $H$  située dans le demi-plan  $y > 0$ ; à chaque point  $M$  de  $H^+$  on associe son abscisse  $X = \varphi(M)$  dans  $(\Omega)$ .

Montrer que  $\varphi$  est une bijection de  $H^+$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ; exprimer inversement en fonction de  $X$  les coordonnées  $x, y$  dans  $(\omega)$  du point  $\varphi^{-1}(X)$ .

3. Soit  $(M, M')$  un bipoint de  $H^+$ ,  $M$  (resp.  $M'$ ) admettant dans  $(\omega)$  les coordonnées  $(x; y)$  (resp.  $(x'; y')$ ). On pose :

$$(1) \quad \delta(M, M') = xy' - x'y$$

Si  $X = \varphi(M)$ , démontrer

$$(2) \quad \delta(M, M') = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{X}{X'} - \frac{X'}{X} \right).$$

### Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier le sous-ensemble  $E$  de  $H^+$  formé des points de  $H^+$  dont les coordonnées dans  $(\omega)$  sont entières  $[(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+]$ .

On placera à titre d'essai les points de  $E$  dont les carrés des deux coordonnées sont inférieurs à 50.

Soit  $\tau$  l'application affine de  $P$  dans  $P$  dont les équations dans  $(\omega)$  sont :

$$\begin{cases} x' &= 2x + y \\ y' &= 3x + 2y \end{cases}$$

On pose :  $a = 2 + \sqrt{3}$ .

Si  $A, B, C$  sont trois points de  $H^+$ , on convient de dire que  $B$  est « entre  $A$  et  $C$  » si le réel  $\varphi(B)$  est compris entre les réels  $\varphi(A)$  et  $\varphi(C)$ .

1. Démontrer que  $\tau$  conserve  $H$ , que  $\tau$  conserve  $H^+$ , que  $\tau$  conserve  $E$ . Vérifier :

$$(\forall M \in H^+), \quad \varphi[\tau(M)] = a \cdot \varphi(M)$$

2. Pour chaque  $k \in \mathbb{Z}$  on pose  $A_k = \varphi^{-1}(a^k)$ .  
Montrer que tous les points  $A_k$  appartiennent à E.  
Calculer  $\delta(A_k, A_{k-1})$  et  $\delta(A_k, A_{k+1})$ .
3. L'entier  $k$  étant fixé, utiliser  $\delta(A_k, M)$  pour prouver que  $A_k$  est le seul point de E entre  $A_{k-1}$  et  $A_{k+1}$  sur  $H^+$ . (On observera, sous la forme (1), que si  $M \in E$ ,  $\delta(A_k, M)$  est entier, d sous la forme (2) que  $X = \varphi(M)$  et  $\delta(A_k, M)$  varient en sens contraires).  
Quelle est l'image de E par  $\varphi$ .

### Partie C

L'objet de cette partie est d'examiner l'ensemble,  $G$  des applications affines  $g$  de P telles que  $g(O) = O$  et  $g(E) = E$ .

1. Montrer que  $(G, \circ)$  est un groupe.
2. Montrer que les seuls éléments de  $G$  conservant le point  $A_0$  sont l'application identique de P et la symétrie orthogonale  $\sigma$ , d'axe  $(O, \vec{j})$ . À cet effet, en supposant que  $g \in G$  et  $g(A_0) = A_0$ , on étudiera l'action de  $g$  sur un bipoint  $(A_k; A_{-k})$ .
3. Soit  $g$  un élément quelconque de  $G$ . On désigne par  $A_m$  l'image  $g(A_0)$ .  
Que peut-on dire de  $\tau^{-m} \circ g$ ?  
Montrer que  $g$  est, soit  $\tau^m$ , soit  $\tau^{-m} \circ g$ .