

∞ Baccalauréat C Territoires d'Outre-mer juin 1969 ∞

I

Trouver les nombres de deux chiffres qui s'écrivent ab dans la base 10 et ba dans la base 7.

II

1. Étudier la fonction f de la variable réelle x , définie pour $x \neq -1$ par

$$x \mapsto 2x - 1 + \frac{1}{x+1} = f(x) = y.$$

Tracer sa courbe représentative, (C) , dans le plan rapporté à un système d'axes ortho-normé $x'Ox$ et $y'Oy$.

2. Déterminer l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe (C) , l'asymptote oblique de (C) , l'axe $x'Ox$ et la droite parallèle à $y'Oy$ d'abscisse $x = 2$.

III

Soit P un plan rapporté à un système d'axes $\overrightarrow{x'Ox}$, $\overrightarrow{y'Oy}$.

On désigne par P^* le plan P privé du point O .

À toute application f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui, à $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, fait correspondre $Z = X + iY$, $X \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}$, défini par $Z = f(z)$, on associe la transformation T_f de P dans P qui, au point m de coordonnées x et y , fait correspondre le point M de coordonnées X et Y .

1. Montrer que la transformation T_g de P^* dans P^* , associée à l'application g définie par

$$g(z) = \frac{a^2}{z}$$

(a constante réelle positive, $z \neq 0$) est la composée d'une inversion et d'une symétrie par rapport à Ox .

Montrer que cette composition est commutative.

2. Étudier la transformation T_h de P dans P associée à l'application h définie par $h(z) = iz$.

3. On considère la transformation $T = T_h \circ T_g$ de P^* dans P^* .

Montrer qu'elle est la composée d'une inversion et d'une symétrie axiale.

Calculer, en fonction des coordonnées x et y de m , les coordonnées X et Y du point $M = T_h \circ T_g(m)$.

Montrer que T admet une transformation réciproque T^{-1} .

Calculer x et y en fonction de X et Y .

4. Quels sont les points doubles de T ?

5. Lorsque m appartient à une droite (D) , étudier la nature de l'ensemble des points $T(m)$.
6. On suppose dans cette question que m appartient au cercle (C) d'équation

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + w = 0$$

(u , v et w , nombres réels donnés).

Quel est l'ensemble transformé de (C) par T ?

Étudier les cercles qui sont invariants par T .