

∞ Baccalauréat C Paris¹ juin 1984 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Le plan P est rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'application affine f qui à tout point M de P, de coordonnées x et y associe le point M' de coordonnées x' et y' données par :

$$\begin{cases} x' &= x - 2y + 2 \\ y' &= -2x + 4y - 1. \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
2. Montrer que l'image de P par f est une droite D .
3. Montrer que $f = h \circ p$, où h est une homothétie qu'on déterminera et p la projection orthogonale sur la droite D .

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans le plan, rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe (\mathcal{C}_m) d'équation

$$mx^2 + y^2 - 2x = 0.$$

1. Discuter suivant les valeurs de m la nature de la courbe (\mathcal{C}_m) .
2. Tracer les courbes (\mathcal{C}_0) et (\mathcal{C}_2) sur une même figure. L'unité de longueur est 4 cm.

PROBLÈME

2 POINTS

Le symbole \ln désigne la fonction logarithme népérien.

Les courbes de la partie A sont à construire dans le plan rapporté au même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité de longueur est 2 cm.

Partie A

1. À tout réel x , tel que $\cos x \neq 0$, on associe :

$$f(x) = -\ln|\cos x|.$$

- a. Étudier la fonction f ainsi définie.
 - b. Construire la courbe représentative de f , notée (\mathcal{C}) .
2. On note S l'ensemble des solutions de l'équation

$$x \in \mathbb{R} \quad \cos x + \sqrt{3} \sin x = 0.$$

- a. Résoudre cette équation.

b. On considère la fonction

$$g : \begin{pmatrix} \mathbb{R} - \{S\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\ln |\cos x + \sqrt{3} \sin x| \end{pmatrix}$$

Montrer que (Γ) , courbe représentative de g , est l'image de (\mathcal{C}) par une application affine que l'on caractérisera.

3. On note \tilde{f} la restriction de f à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

a. Montrer que \tilde{f} admet une fonction réciproque, notée \tilde{f}^{-1} . Calculer $\tilde{f}^{-1}(\ln \sqrt{2})$.

b. Étudier la dérivabilité de \tilde{f}^{-1} . Montrer que, pour tout réel strictement positif x , on a :

$$(\tilde{f}^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

c. Dessiner la courbe représentative de \tilde{f}^{-1} , notée (\mathcal{C}') .

4. La suite u est définie par $u_0 = \frac{\pi}{4}$ et, pour tout entier naturel non nul n , $u_n = f(u_{n-1})$.

a. Montrer que l'équation

$$x \in \left] \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right[, \quad f(x) = x$$

admet une unique solution, notée ℓ . Donner un encadrement de ℓ dans un intervalle de longueur 10^{-2} .

b. Montrer, par récurrence, que tous les termes de la suite u appartiennent à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Montrer que u est décroissante.

c. Montrer que u est convergente et trouver sa limite.

Partie B

On considère la fonction G , définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$G(x) = \int_{\ln \sqrt{2}}^x \frac{1}{\sqrt{e^{2t} - 1}} dt.$$

1. Montrer qu'il existe un réel k , que l'on calculera, tel que pour tout réel strictement positif, on ait

$$G(x) = f^{-1}(x) + k.$$

2. Montrer que G admet une limite en plus l'infini et une limite en 0. Calculer ces limites.

Partie C

1. a. α est un nombre réel, résoudre l'équation

$$\mathcal{E}_{\alpha,1} \quad \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0. \end{cases}$$

- b. En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation

$$\mathcal{E}_{\alpha,n} \quad \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^{2n} - 2z^n \cos \alpha + 1 = 0. \end{cases}$$

dans laquelle n est un entier naturel non nul donné.

2. Pour tout entier naturel non nul n , pour tout réel α , pour tout complexe z , on pose

$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n \cos \alpha + 1.$$

On admet que, pour tous z , α et n , on a

$$\begin{aligned} P_\alpha(z) &= \left(z^2 - 2z \cos \frac{\alpha}{n} + 1 \right) \times \cdots \times \left(z^2 - 2z \cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + 1 \right) \cdots \\ &\quad \times \cdots \times \left(z^2 - 2z \cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) + 1 \right). \end{aligned}$$

et on note

$$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1} \left[z^2 - 2z \cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + 1 \right].$$

- a. Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{4^{n-1}}.$$

- b. Pour tout α élément de l'intervalle $[0; \pi[$ et pour tout naturel n supérieur ou égal à 2, on pose

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right).$$

Montrer que, pour α non nul, on a

$$2^{n-1} H_n(\alpha) = \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha}{2n} \right)}.$$

- c. Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$, lorsque α tend vers 0?
 d. En déduire que pour tout naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \cdots \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$