

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Paris septembre 1984 ∞

EXERCICE 1

5 points

1. Les complexes a_1, a_2, a_3, a_4 sont donnés.

Résoudre l'équation :

$$\begin{cases} (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \\ z_1 + z_2 = 2a_1 \\ z_2 + z_3 = 2a_2 \\ z_3 + z_4 = 2a_3 \\ z_4 + z_1 = 2a_4 \end{cases}$$

2. Dans le plan, on considère un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$.

- a. Montrer qu'il existe un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ dont les milieux des côtés sont les points $A_1A_2A_3A_4$ si et seulement si le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ est un parallélogramme.
- b. Montrer que, s'il en est ainsi, le point de concours des diagonales du parallélogramme $A_1A_2A_3A_4$ est l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3 et M_4 .

EXERCICE 2

4 points

1. Déterminer la solution f de l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

vérifiant les conditions initiales : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

2. On désigne par F la primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 0. Justifier l'existence de F .
À l'aide de deux intégrations par parties, déterminer F .

PROBLÈME

11 points

Les parties A et B sont indépendantes

Dans tout le problème, \mathcal{P} est le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = -x \ln x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

- a. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (Γ) dans \mathcal{P} .

- b. Étudier, suivant les valeurs de x , les positions relatives de (Γ) et de la droite (D) d'équation $y = x$.

2. Soit g la fonction définie dans \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = -x \ln |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

- a. En utilisant les résultats de la question précédente, tracer la courbe représentative (\mathcal{C}) de g .
- b. Soit T l'application définie dans \mathcal{P} , qui à tout point M de coordonnées $(x ; y)$ associe le point M_1 de coordonnées $(x_1 ; y_1)$ avec :

$$\begin{cases} x_1 = ex \\ y_1 = -ex + ey \end{cases}$$

Quelle est l'image par T de la courbe (\mathcal{C}) ?

3. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0 ; [\\ u_{n+1} = g(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et strictement croissante.
En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Partie B

Dans cette partie, $x \in]0 ; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f_n la fonction définie sur $]0 ; 1]$ par :

$$\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f_n(x) = x \left(\ln \frac{1}{x} \right), \quad \forall x \in]0 ; 1] \end{cases}$$

- Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n sur $]0 ; 1]$.
- Démontrer que f_n admet un maximum d'abscisse $a_n = e^{-n}$.
On pose $b_n = f_n(a_n)$; calculer b_n en fonction de n .
- Donner le tableau de variations de f_n sur $]0 ; 1]$ (on ne demande pas de courbe représentative).
- Démontrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.
 - Démontrer l'inégalité : $\forall x \in]0 ; e^{-n}]$, $f_n(x) \geq \frac{b_n}{a_n} x$.
- On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$, $J_n = \int_0^{e^{-n}} f_n(x) dx$.
 - Démontrer que $\forall n \geq 1$, $I_n \geq J_n \geq \frac{1}{2} n^n e^{-2n}$.
 - En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est divergente.