

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Paris juin 1969 ∞

**EXERCICE 1**

Soit  $(C)$  l'hyperbole représentée, dans un repère d'axes orthonormé  $Ox$  et  $Oy$ , par l'équation

$$y^2 = 3x^2 - 12x + 9.$$

Déterminer le centre de symétrie de  $(C)$  (par ses coordonnées) et les asymptotes de  $(C)$  (par leurs équations).

Dessiner  $(C)$  et ses asymptotes.

**EXERCICE 2**

Soit  $f$  la fonction qui à  $x$  fait correspondre

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 3}{x},$$

$x$  décrivant l'intervalle fermé  $[+1 ; +3]$ .

1. Déterminer la primitive,  $F$ , de  $f$  qui s'annule pour  $x = 2$ . Dans la suite, on pourra désigner par  $a$  et  $b$  respectivement les nombres  $F(1)$  et  $F(3)$  [qu'on ne demande pas de calculer].
2. Montrer, en énonçant avec précision le théorème utilisé, que cette fonction  $F$  de la variable  $x$ ,  $x$  décrivant l'intervalle  $[+1 ; +3]$ , admet une fonction réciproque,  $G$ , définie sur un intervalle que l'on précisera.

Démontrer que la valeur 0 appartient à cet intervalle.

Déterminer, pour la valeur 0 de la variable, la valeur de la fonction  $G$  et la valeur de sa dérivée.

**PROBLÈME**

À tout nombre complexe  $x + iy$  ( $x$  et  $y$  réels) on fait correspondre, dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $Ox$ ,  $Oy$ , le point  $M$ , de coordonnées  $x$  et  $y$ , qu'on appellera image du nombre  $x + iy$ .

Dans tout le problème, on ne considérera que des nombres complexes  $x + iy$  pour lesquels  $y$  est strictement positif; l'ensemble de leurs images sera donc un demi-plan,  $D$ , limité par l'axe  $Ox$ .

$M$  et  $P$  étant deux points de  $D$ ,  $M'$  le symétrique de  $M$  par rapport à l'axe  $Ox$ , on fait correspondre au couple  $(M, P)$  le nombre réel  $\text{Log} \frac{PM' + PM}{PM' - PM}$  que l'on note  $d(M, P)$ . (Log désigne le logarithme népérien.)

1. Montrer que  $d(M, P)$  est nul si, et seulement si,  $M$  et  $P$  sont confondus.

$M$  et  $P$  étant supposés distincts, démontrer que l'on a

$$d(M, P) > 0$$

et

$$d(M, P) = d(P, M).$$

Calculer  $d(M, P)$  si  $M$  est l'image du nombre complexe  $1 + 2i$  et  $P$  l'image du nombre complexe  $i$ .

2.  $M$  et  $P$  étant les images de deux nombres complexes,  $x + iy$ ,  $x + iy'$ , de même partie réelle,  $x$ , montrer que

$$d(M, P) = \left| \operatorname{Log} \frac{y'}{y} \right| = \left| \operatorname{Log} \frac{MH}{PH} \right|$$

$H$  étant le point où la droite  $MP$  coupe l'axe  $Ox$ .

$M, P, Q$  étant les images respectives des nombres complexes  $x + iy$ ,  $x + iy'$ ,  $x + iy''$ , avec

$$0 < y \leq y' \leq y'',$$

démontrer que

$$d(M, Q) = d(M, P) + d(P, Q).$$

3. a. On considère une inversion de puissance positive, dont le pôle (ou centre)  $I$  est sur l'axe  $Ox$ .

$M$  et  $P$  étant deux points appartenant à  $D$ ,  $m$  et  $p$  étant leurs inverses dans l'inversion précédente, démontrer que  $m$  et  $p$  appartiennent à  $D$  et que

$$d(m, p) = d(M, P).$$

(On rappelle la formule  $mp = MP \cdot \frac{|k|}{IPIM}$ ,  $m$  et  $p$  étant les inverses des points  $M$  et  $P$  dans l'inversion de pôle  $I$  et de puissance  $k$ .)

- b. On donne deux points distincts,  $\alpha$  et  $\beta$ , de l'axe  $Ox$  et le demi-cercle de diamètre  $\alpha\beta$  situé dans le demi-plan  $D$ .

Si  $M, P$  et  $Q$  sont trois points de ce demi-cercle tels que  $P$  appartienne à l'arc  $MQ$  de ce demi-cercle, démontrer, en utilisant une inversion de pôle  $\alpha$ , que

$$d(M, Q) = d(M, P) + d(P, Q).$$

- c. Le demi-cercle de diamètre  $\alpha\beta$  étant toujours donné,  $M$  et  $P$  étant deux points de ce demi-cercle et  $M'$  le symétrique de  $M$  par rapport à l'axe  $Ox$ , la droite  $\alpha P$  coupe la droite  $MM'$  en  $J$ , la droite  $\beta P$  coupe la droite  $MM'$  en  $K$ ,  $J$  et  $K$  appartenant à  $D$ . Démontrer que

$$d(M, P) = d(M, J) = d(M, K) = \left| \operatorname{Log}(\alpha M, \alpha P, \alpha \beta, \alpha T) \right|,$$

si  $(\alpha M, \alpha P, \alpha \beta, \alpha T)$  désigne le birapport des droites  $\alpha M, \alpha P, \alpha \beta, \alpha T$ ,  $\alpha T$  étant la tangente en  $\alpha$  au cercle de diamètre  $\alpha \beta$ .

4. On donne deux points  $M$  et  $P$  distincts, appartenant à  $D$ . Quel est l'ensemble des points  $Q$  de  $D$  tels que

$$d(M, Q) = d(M, P)?$$