

## ☞ Baccalauréat C Paris juin 1971 ☞

### EXERCICE 1

Soit  $f$  la fonction

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{1 - \text{Log } x},$$

où  $\text{Log}$  désigne le logarithme népérien.

Préciser le domaine de définition de  $f$ , et celui des deux premières dérivées  $f'$  et  $f''$  de  $f$ .

Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$ .

Étudier la variation de  $f$  et construire sa courbe représentative  $(C)$  (repère orthonormé).

Construire la tangente à  $(C)$  au point  $A$ , d'ordonnée nulle, puis la tangente à  $(C)$  au point  $I$ , d'abscisse  $\alpha$  telle que  $f'(\alpha) = 0$ .

Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $g$ , définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ ; calculer explicitement  $g(x)$ .

### EXERCICE 2

À tout réel  $\lambda \in ]0; +1[$  on associe, dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes  $Ox$ ,  $Oy$ , l'ellipse  $(E_\lambda)$  d'équation

$$y^2 = 2x - \frac{x^2}{\lambda}.$$

1. Déterminer par leurs coordonnées le centre  $\Omega$  et les sommets de cette ellipse  $(E_\lambda)$ .  
Trouver et tracer la courbe  $S$  constituant l'ensemble des sommets du grand axe quand  $\lambda$  décrit l'intervalle  $]0; +1[$ . Préciser la nature de  $S$ .
2. Déterminer par leurs coordonnées les foyers de l'ellipse  $(E_\lambda)$ . Trouver et tracer la courbe  $(\Phi)$  constituant l'ensemble de ces foyers quand  $\lambda$  décrit l'intervalle  $]0; +1[$ .

### PROBLÈME

1. On donne deux nombres complexes non nuls  $a$  et  $s$  et l'on considère la suite  $\Sigma$  des nombres complexes  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ , définie par  $z_0 = 0$  et par la relation de récurrence

$$(1) \quad z_{n+1} = sz_n + a, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- a. Calculer  $z_1, z_2, z_3, z_4$  en fonction de  $a$  et de  $s$ .  
Exprimer simplement  $z_n$  en fonction de  $a, s$  et  $n$ , lorsque  $s \neq 1$ .  
Que peut-on dire de  $\Sigma$  lorsque  $s = -1$ ?  
Donner la valeur de  $z_n$  lorsque  $s = 1$ .
- b. Deux éléments distincts de  $\Sigma$  peuvent-ils être égaux? Montrer qu'alors  $\Sigma$  est périodique.

c. Vérifier que deux termes consécutifs de  $\Sigma$  ne sont jamais égaux et montrer que

$$(2) \quad \frac{z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n} = s + 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

d. Inversement, soit donnée une suite vérifiant les trois conditions suivantes : deux termes consécutifs ne sont jamais égaux, la relation (2) est satisfaite, les deux premiers termes sont 0 et  $a$ . Démontrer qu'une telle suite est confondue avec  $\Sigma$ .

2. Tous les points considérés dans cette question appartiennent à un même plan euclidien, muni d'un repère orthonormé d'axes  $Ox, Oy$  (unité : 1 cm).

L'affixe d'un point de ce plan, de coordonnées  $(x; y)$ , est le nombre complexe  $z = x + iy$ .

Soit  $\theta$  un angle donné tel que  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  et  $r$  un nombre réel donné strictement positif.

Si  $P$  désigne un point quelconque, on note  $f_P$  la similitude de centre  $P$ , d'angle  $\theta$  et de rapport  $r$ ; ainsi  $f_P(M)$  est le point image de  $M$  par  $f_P$ . On considère alors la suite  $\mathcal{A}$  des points  $O, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , tels que, pour tout  $n$ ,

$$A_2 = f_O(A_1), A_3 = f_{A_1}(A_2), \dots \text{ et } A_{n+2} = f_{A_n}(A_{n+1}),$$

où  $O$  est l'origine et  $A_1$  le point d'affixe  $a$  donnée ( $a \neq 0$ ).

a. Si  $z_n$  désigne l'affixe de  $A_n$  trouver la valeur du rapport

$$\frac{z_{n+2} - z_n}{z_{n+1} - z_n}.$$

Déduire alors du 1. que  $A_{n+1}$  est le transformé de  $A_n$  dans une similitude  $S$ , indépendante de  $n$ ; calculer seulement, ici, l'affixe de son centre.

On ne demande d'étudier  $S$  que dans les deux cas **b.** et **c.** suivants.

b. On suppose  $r = \frac{1}{\cos \theta}$ ; déterminer l'angle, le rapport et le centre,  $U$ , de  $S$ . Vérifier que tous les points  $A_i$  appartiennent, selon la parité de  $i$ , à l'une ou l'autre de deux droites fixes.

Comment faut-il choisir  $\theta$  pour que la suite  $\mathcal{A}$  soit périodique?

Construire le point  $U$  et la ligne polygonale

$$OA_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

pour

$$a = 5 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\theta}{6}$$

c. On suppose  $r = 2 \cos \theta$ ; montrer que  $S$  est une rotation, dont on déterminera l'angle et le centre  $V$ .

Qu'en déduit-on pour les côtés de la ligne polygonale  $L$  de sommets successifs

$$O, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6?$$

Comment faut-il choisir  $\theta$  pour que L soit fermée?  
Construire le point V et la ligne L pour

$$a = 5 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{2\pi}{7}.$$