

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Paris juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2-4} dx$$

(sous la forme $\text{Log} \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, le symbole Log désignant le logarithme népérien).

Écrire la formule d'intégration par parties pour l'intégrale

$$\int_0^1 v(x)u'(x)dx,$$

et en déduire, en prenant $u'(x) = 1$, l'intégrale

$$I = \int_0^1 \text{Log} \left| \frac{x+2}{x-2} \right| dx.$$

Donner une valeur décimale approchée de I , à $4 \cdot 10^{-4}$ près, sachant que 0,693 1 est une valeur décimale approchée, à $5 \cdot 10^{-5}$ près, de $\text{Log} 2$ et que 1,098 6 est une valeur décimale approchée, à $5 \cdot 10^{-5}$ près, de $\text{Log} 3$.

EXERCICE 2

On considère le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, dont les éléments sont notés $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$, et l'équation

(E) $x^2 + px + q = 0$, où les coefficients p et q appartiennent à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et où l'inconnue x est à chercher dans ce corps.

Déterminer successivement tous les couples $(p ; q)$ tels que E admette

1. la solution $\dot{6}$;
2. la solution \dot{i} ;
3. la solution $\dot{2}$;
4. aucune solution.

PROBLÈME

Partie A

Le plan euclidien (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, noté \mathcal{R} , d'axes Ox , Oy .

À l'application, de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , définie par

$$z \mapsto Z = iz + (1-i)\bar{z},$$

(où \bar{z} est le conjugué de z) correspond alors la transformation T , du plan (P) qui, à m d'affixe¹ z , associe M d'affixe Z .

1. L'affixe d'un point de coordonnées $(x ; y)$ est le nombre complexe $x + iy$

1. Vérifier que le milieu du segment $[mM]$ appartient à l'axe Ox et que, si m est distinct de M , la droite (mM) a une direction fixe.

On pourra, par exemple, exprimer d'abord les coordonnées X et Y du point M en fonction des coordonnées x et y du point m (dans le repère \mathcal{R}).

En déduire que la transformation T est une symétrie oblique d'axe Ox , dont on précisera la direction.

2. a. Soit \mathcal{R}' le nouveau repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) défini dans le plan (P) par $(\vec{u}, \vec{u}') = \alpha$ (où α est un nombre réel donné) et par $(\vec{u}', \vec{v}') = \frac{\pi}{2}$.

Montrer que les affixes z et z' d'un même point m dans les repères respectifs \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont liées par la relation $z = z'(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

Exprimer, en fonction de z' et \bar{z}' , l'afixe Z' (dans le repère \mathcal{R}') de l'image M de m par la transformation T .

- b. On prend $\alpha = \frac{\pi}{8}$. Montrer que $Z' = iz' - i\sqrt{2}\bar{z}'$.

Calculer alors les coordonnées X' et Y' du point M en fonction des coordonnées x' et y' du point m (dans le repère \mathcal{R}').

En déduire une équation, dans \mathcal{R}' , de l'image $(\Gamma) = T(\gamma)$ par T du cercle (γ) de centre O et de rayon 1.

Quelle est la nature de (Γ) ?

Dessiner (γ) et (Γ) sur une même figure; préciser quels sont leurs points communs, en s'appuyant sur la nature géométrique, trouvée au 1., de la transformation T .

Partie B

On associe à tout couple $(a, ; b)$ de nombres complexes l'application, $f_{a, b}$, de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , définie par

$$f_{a, b}(z) = az + b\bar{z}.$$

1. Mettre $f_{a, b} \circ f_{a, b}(z) - z$, c'est à-dire $f_{a, b}[f_{a, b}(z)] - z$, sous la forme $Az + B\bar{z}$, A et B étant deux constantes complexes.

Démontrer que $Az + B\bar{z}$ est nul pour tout z si, et seulement si, $A = B = 0$. (On pourra pour cela donner à z les valeurs 1 et i .)

Traduire alors par un système, S , de deux relations entre a, b, \bar{a} et \bar{b} la condition pour que $f_{a, b}$ soit involutive.

Que deviennent ces relations pour $b = 0$ (on montrera qu'il existe deux applications $f_{a, b}$ involutives) et pour $b \neq 0$.

Vérifier que les valeurs $a = i$ et $b = 1 - i$, utilisées dans la partie A, conviennent dans ce dernier cas.

2. Dans cette question, $f_{a, b}$ est supposée quelconque, involutive ou non.

On considère maintenant \mathbb{C} comme un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

- a. Démontrer que l'application $f_{a, b}$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est linéaire. On prend $\mathcal{B} = (1, i)$ comme base de \mathbb{C} ; calculer $f_{a, b}(1)$ et $f_{a, b}(i)$.

- b.** Soit φ une application linéaire quelconque de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , définie par sa matrice $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p & s \\ r & q \end{pmatrix}$ relativement à \mathcal{B} , p, q, r et s étant quatre réels.

Démontrer qu'il existe une application $f_{a,b}$ qui coïncide avec φ ; à cet effet, on calculera $\varphi(1)$ et $\varphi(i)$ et l'on exprimera a et b au moyen de p, q, r et s .

- c.** Dédurre alors du système S de relations trouvées, précédemment, un système de relations entre p, q, r et s traduisant la condition pour que φ soit involutive. Trouver directement ces relations, en calculant \mathcal{M}^2 , c'est-à-dire $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$.