

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Paris ∞

EXERCICE 1

1. Soit  $F$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F(x) = \int_1^{1+x^2} \text{Log } t \, dt.$$

(le symbole  $\text{Log}$  désignant le logarithme népérien).

Calculer la dérivée  $F'(x)$  de  $F$  au point  $x$ , en considérant  $F$  comme la fonction composée de la fonction  $g : x \mapsto 1 + x^2$  et de la fonction  $h : X \mapsto \int_1^X \text{Log } t \, dt$  ( $X > 0$ ).

2. Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale  $\int_1^X \text{Log } t \, dt$ .

Exprimer alors  $F(x)$  sans utiliser le signe d'intégration, et retrouver l'expression de  $F'(x)$ .

EXERCICE 2

Dans le plan affine  $P$  rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on donne les points  $A$  et  $B$  définis par  $\vec{OA} = \vec{i}$ ,  $\vec{OB} = \vec{j}$ .

Tout point  $M$  du plan  $P$  a deux coordonnées, notées  $x$  et  $y$ , dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Comment choisir le point  $M$  pour que les points  $A, B, M$ , affectés respectivement des coefficients  $x, y, xy$ , admettent un barycentre?

Dessiner l'ensemble  $H$  des points  $M$  qui ne conviennent pas.

2. Trouver et dessiner l'ensemble  $K$  des points  $M$  pour lesquels le point  $O$  est le barycentre des points  $A, B, M$  affectés respectivement des coefficients  $x, y, xy$ .

PROBLÈME

Partie A

On donne un entier naturel  $a$ , supérieur ou égal à 1.

1. Trouver l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions du système suivant d'inéquations, où l'inconnue est le nombre réel  $x$  :

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{-x^{3a} + 2x^a - 1}{1 - x^{3a}} < 0 \end{cases}$$

(on pourra d'abord poser  $x^a = X$ ).

2. Calcul numérique (on pourra utiliser une table de logarithmes) :

Trouver la plus petite valeur de l'entier  $a$  pour laquelle le nombre  $\frac{49}{51}$  appartient à  $\mathcal{J}$ .

### Partie B

On considère l'ensemble  $\mathcal{S}$ , de toutes les suites réelles  $u$ , applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $n \mapsto u_n$ .  
La somme  $u + u'$  de deux suites  $u$  et  $u'$  de  $\mathcal{S}$  est la suite  $n \mapsto u_n + u'_n$ .

Le produit  $\gamma u$  d'une suite  $u$  par un réel  $\gamma$  est la suite  $n \mapsto \gamma u_n$ .

La suite 0 est la suite  $n \mapsto 0$  (réel nul).

L'ensemble  $\mathcal{S}$ , muni de cette addition et de cette multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $p$  un nombre réel donné, appartenant à l'intervalle  $]0; 1[$ .

On désigne par  $E$  l'ensemble des suites  $u$  de  $\mathcal{S}$  qui satisfont à la relation de récurrence :

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad pu_{n+2} - u_{n+1} + (1-p)u_n = 0.$$

a. Montrer qu'une telle suite est définie par la donnée de ses deux premiers termes  $u_0$  et  $u_1$  et par la relation (1).

b. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}$ .

c. Soit  $v$  et  $w$  les deux suites de  $E$  définies par  $v_0 = 1, v_1 = 0$  et par  $w_0 = 0, w_1 = 1$ .

— Montrer que  $\{v, w\}$  est un système libre.

— Montrer que, si  $u$  est une suite quelconque de  $E$ ,  $u$  est égale à la suite  $u_0v + u_1w$ .

— Que peut-on dire alors de  $\{v, w\}$ ? Quelle est la dimension de  $E$ ?

2. a. Vérifier que si  $p = \frac{1}{2}$  les suites de  $E$  sont des suites arithmétiques.

On suppose  $p \neq \frac{1}{2}$ . Montrer que la suite  $n \mapsto t^n$  ( $t$  réel non nul) appartient à  $E$  si et seulement si  $t$  est tel que  $pt^2 - t + 1 - p = 0$ .

Vérifier que l'on obtient ainsi deux suites formant une base de  $E$ . Écrire alors une expression générale du terme  $u_n$  d'une suite  $u$  quelconque de  $E$ , en désignant par  $\lambda$  et  $\mu$  les coordonnées de  $u$  dans cette base.

b. Soit  $\alpha$  un entier donné, supérieur ou égal à 1. On désigne maintenant par  $u$  une suite de  $E$  telle que  $u_0 = 1$  et  $u_\alpha = 0$ .

— On prend  $p = \frac{1}{2}$ , exprimer alors  $u_n$  en fonction de  $\alpha$  et de  $n$ .

— On suppose  $p \neq \frac{1}{2}$  et on pose  $x = \frac{1-p}{p}$ ; exprimer  $u_n$  en fonction de  $x, \alpha$  et  $n$ .

### Partie C

Un jeu oppose deux joueurs A et A', auxquels on attribue respectivement, au début du jeu, un « avoir » de  $a$  jetons et un « avoir » de  $2a$  jetons ( $a$  entier donné, supérieur ou égal à 1).

La rencontre comporte des parties successives et indépendantes, numérotées 1, 2, 3, ...

La probabilité pour que le joueur A gagne une partie est supposée indépendante du rang de cette partie, et égale à  $p$  ( $0 < p < 1$ ). Après chaque partie le joueur perdant donne un jeton au gagnant. Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur est « ruiné », c'est-à-dire ne dispose plus de jetons, et le joueur « ruiné » perd le match.

1. a.  $k$  désignant un entier naturel, on considère la variable aléatoire  $X_k$  égale à l'avoir du joueur A après la partie de rang  $k$  (si  $k \neq 0$ ) et avant la partie de rang  $k + 1$  (si celle-ci a lieu). On a ainsi  $X_0 = a$  et  $0 \leq X_k \leq 3a$ .

Quelles sont les valeurs « possibles » de  $X_1$ ? de  $X_2$ ? de  $X_{2k}$ ? de  $X_{2k+1}$ ?

- b. Si  $X_k = 0$  le joueur A est ruiné; si  $X_k = 3a$  le joueur A' est ruiné; dans chacun de ces cas le match ne se poursuit pas au delà de la  $k$ -ième partie.

Si  $X_k$  est différent de 0 et de  $3a$  l'on admet<sup>1</sup> que la probabilité de ruine ultérieure du joueur A ne dépend pas de  $k$  mais seulement de la valeur  $n$  de  $X_k$ ?

On désigne par  $r_n$  la probabilité de ruine de A, connaissant  $n$ . On a ainsi  $r_0 = 1$  et  $r_{3a} = 0$ .

En considérant les deux valeurs que peut prendre  $X_{k+1}$  sachant que  $X_k = n$ , montrer<sup>2</sup> que  $r_n = (1-p)r_{n-1} + pr_{n+1}$  et constater que la suite  $n \mapsto r^n$  vérifie la relation de récurrence (1) du B.

Exprimer alors, à l'aide de B. 2. b., le terme  $r_n$  en fonction de  $n$  et de  $a$  (lorsque  $p = \frac{1}{2}$ ) ou en fonction de  $n, a$  et de  $x = \frac{1-p}{p}$  (lorsque  $p \neq \frac{1}{2}$ ).

- c. On désigne par  $r'_m$  la probabilité de ruine du joueur A', connaissant son avoir  $m$ . Montrer qu'on obtient  $r'_m$  en remplaçant, dans l'expression de  $r_n$ ,  $n$  par  $m$  et  $p$  par  $1-p$  (c'est-à-dire  $x$  par  $\frac{1}{x}$ ). Écrire cette expression  $x$  de  $r'_m$  (pour  $p = \frac{1}{2}$  et pour  $p \neq \frac{1}{2}$ ).

Vérifier la relation  $r_a + r'_{2a} = 1$  (2).

2. En notant que  $r_a$  et  $r'_{2a}$  sont les probabilités de ruine de A et de A' au début du match, on voit que le jeu est favorable au joueur A si  $r_a < r'_{2a}$ , c'est-à-dire, d'après la relation (2) précédente, si  $2r_a < 1$ .

Que vaut  $r_a$  lorsque  $p = \frac{1}{2}$ ?

On prend  $p \neq \frac{1}{2}$ . Exprimer la différence  $D_a = 2r_a - 1$  en fonction de  $x$  et de  $a$ .

Pour quelles valeurs de  $x$  a-t-on  $D_a < 0$ ? (cf. le A 1.).

$p$  étant fixé, supérieur à  $\frac{1}{2}$ , comment choisir  $a$  pour que le jeu soit favorable au joueur A?

*Application numérique* :  $p = 0,51$ ; utiliser le A 2. pour donner la plus petite valeur convenable de l'entier  $a$ .

1. Le candidat ne cherchera pas à définir l'espace de probabilité relatif à ce jeu, et se bornera à faire le raisonnement qui lui est suggéré.

2. Le candidat pourra admettre ce résultat