Baccalauréat C Paris juin 1977

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Quel est le reste de la division par 8 du nombre 7^n, n désignant un entier naturel quelconque ?
2. Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $7^n \cdot n + 4n + 1$ soit divisible par 8 ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. Soit n un entier naturel. Une variable aléatoire X_n peut prendre les n valeurs

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{k}{n}, \cdots, \frac{n}{n}$$

et elles seules, avec probabilités égales.
Calculer l'espérance mathématique de X_n et trouver sa limite éventuelle quand $n \to +\infty$.

2. Soit f une fonction numérique, définie et continue sur le segment $[0 ; 1]$.
Une variable aléatoire Y_n peut prendre les n valeurs

$$f\left(\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{2}{n}\right), \cdots, f\left(\frac{k}{n}\right), \cdots, f\left(\frac{n}{n}\right)$$

et elles seules, avec probabilités égales.
Écrire l'espérance mathématique $\mathrm{E}(Y_n)$ de Y_n. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{E}(Y_n)$ existe : l'exprimer sous forme d'une intégrale.

3. p étant un entier au moins égal à 1, calculer la limite de

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

PROBLÈME **13 POINTS**

Soit :
$\mathbb{C}^\star$ l'ensemble des nombres complexes non nuls,
E un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$,
$E^\star$ le plan privé de O.
On considère l'application f de $\mathbb{C}^\star$ dans $\mathbb{C}^\star$ qui, à z, associe $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$
et l'application F de $E^\star$ dans $E^\star$ qui, à tout point m d'affixe z, associe le point d'affixe Z où $Z = \dfrac{1}{z^2}$.

Partie A

1. Soit un nombre complexe z, de module r non nul et d'argument θ. Montrer que Z s'écrit

$$Z = \frac{1}{r^2}(\cos 2\theta - \text{i} \sin 2\theta).$$

2. L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ? Etudier l'équation z = f(z).
3. **a.** On désigne par m un point de $E^{\star}$ dont l'affixe a pour module 1.
   Construire son image par F.
   Représenter les points invariants par F.

   b. Étant donné un point M de $E^{\star}$ dont l'affixe a pour module 1, quel est l'ensemble des points m tels que $F(m) = M$? Construire ces points.
4. **a.** Soit (d) une demi-droite de E, d'origine O. Construire l'image par F de $(d^{\star})$, où $(d^{\star})$ désigne d privée du point O.
   Quelle est l'image par F d'une droite passant par O, mais privée de O ?

   b. Étant donné, dans E, une droite (Δ) passant par O, quel est l'ensemble des points m tels que $F(m)$ appartienne à $(\Delta^{\star})$, où $(\Delta^{\star})$ désigne (Δ) privée de O ?

Partie B

On considère l'ensemble (γ) des points de $E^{\star}$ dont l'affixe est

$$z = -2\cos^2\theta - 2\text{i} \sin\theta \cos\theta,$$

où θ décrit l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$.

1. Démontrer que (γ) est inclus dans un cercle passant par O.
2. Donner, en fonction de θ, le module et un argument de l'affixe z d'un point m de (γ)).
   Exprimer, en fonction de $\tan\theta$, les coordonnées X et Y de $F(m)$.
   En déduire l'équation de l'image (Γ) de (γ) par l'application F.
   Quelle est la nature de (Γ) ?
   Vérifier que les points I et J de (γ) définis respectivement par $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $\theta = \frac{4\pi}{3}$ appartiennent à (Γ). En expliquer la raison.