

Baccalauréat C Paris¹ **juin 1980**

EXERCICE 1

4 POINTS

Soient trois points non alignés A, B, C d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$.

On pose $d(B, C) = a$, $d(C, A) = b$, $d(A, B) = c$. On désigne par I le milieu du segment [BC].

Quels que soient les points P et Q du plan, on notera PQ la distance de ces points.

1. Établir l'égalité : $b^2 + c^2 = 2AI^2 + \frac{a^2}{2}$.

2. À tout point M du plan $\mathcal{P}$ on associe le réel :

$$\varphi(M) = MB^2 + MC^2 - MA^2.$$

a. Soit G le barycentre des points B, C et A affectés respectivement des coefficients 1, 1 et -1.

Donner une détermination simple de G et placer ce point sur la figure.

b. Exprimer $\varphi(M)$ à l'aide de MG, a , b , c . Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a , b , c pour qu'il existe un point M au moins vérifiant $\varphi(M) = 0$.

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit la famille d'équations :

$$z^2 - (1 + i \sin 2\theta)z + \frac{1}{2} \sin 2\theta = 0 \quad (E_\theta)$$

dans laquelle θ désigne un réel appartenant à l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$; à tout complexe

$z = x + iy$, $(x; y)$ étant élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$ dans $\mathcal{P}$.

1. Résoudre l'équation (E_θ) dans l'ensemble des nombres complexes. Préciser le cas des racines doubles.

2. Soient $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ les points de $\mathcal{P}$ associées aux solutions $z'(\theta)$ et $z''(\theta)$ de l'équation (E_θ) et soit $I(\theta)$ le milieu du segment $[M'(\theta), M''(\theta)]$.

a. Déterminer l'ensemble des points $I(\theta)$ quand θ décrit $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

b. Montrer que l'ensemble des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ est un cercle $\mathcal{C}$ que l'on précisera.

c. Démontrer, lorsque $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ sont distincts, que la droite contenant ces deux points a une direction indépendante de θ .

d. θ étant donné (on fera la figure avec $\theta = \frac{\pi}{6}$), déduire de ce qui précède une construction simple de $I(\theta)$ et des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$.

Une figure soignée comportera tous les éléments intéressants de l'exercice.

PROBLÈME**12 POINTS**

Soit f l'application de l'intervalle $I =]-1 ; 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \mapsto f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt.$$

Partie A

1. a. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout t appartenant à I :

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}.$$

- b. Calculer $f(x)$.

Étudier les variations de l'application f (en particulier la parité) et construire la courbe représentative de f dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Montrer que f est une bijection de I sur $\mathbb{R}$. En désignant par u un réel strictement positif, résoudre dans I l'équation $f(x) = \log u$. (On désigne par $\log u$ le logarithme népérien de u .)

Partie B

Soit r un rationnel strictement supérieur à 1. On pose $r = \frac{p}{q}$, p et q étant deux entiers naturels premiers entre eux.

On désigne par $\mathbb{N}'$ l'ensemble des entiers naturels strictement supérieur à 1.

1. Démontrer que si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux vérifiant $a > b$, les entiers naturels $a + b$ et $a - b$ ont pour plus grand diviseur commun soit 1, soit 2. Préciser, en considérant les parités de a et de b , dans quelles conditions on obtient chacun de ces deux cas.
2. Montrer que, quel que soit r , l'équation

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = \log r, \quad m \in \mathbb{N}'$$

n'a pas de solution.

3. a. Résoudre les équations

$$\begin{aligned} 2f\left(\frac{1}{m}\right) &= \log 2, & m \in \mathbb{N}' \\ 2f\left(\frac{1}{m}\right) &= \log 4, & m \in \mathbb{N}'. \end{aligned}$$

- b. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation :

$$2f\left(\frac{1}{m}\right) = \log r, \quad m \in \mathbb{N}'$$

ait une solution est qu'il existe un entier naturel non nul k tel que

$$r = 1 + \frac{2}{k}.$$

Résoudre alors cette équation.

4. Soit l'équation à deux inconnues :

$$f\left(\frac{1}{m}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = \log r, \quad (m, n) \in \mathbb{N}' \times \mathbb{N}'. \quad (E_r)$$

a. Montrer que l'équation (E_r) a les mêmes solutions que l'équation :

$$(m-s)(n-s) = t, \quad (m; n) \in \mathbb{N}' \times \mathbb{N}'$$

où s et t désignent deux rationnels que l'on calculera en fonction de r .

b. Résoudre les équations

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{m}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) &= \log 2, & (m; n) \in \mathbb{N}' \times \mathbb{N}' \\ f\left(\frac{1}{m}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) &= \log 4, & (m; n) \in \mathbb{N}' \times \mathbb{N}' \end{aligned}$$