

∞ Baccalauréat C Paris juin 1981 ∞

EXERCICE 1

Pour chaque m réel strictement positif, on définit une application f_m de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à tout x associe

$$f_m(x) = \text{Log} (e^x + me^{-x}).$$

(Log désigne la fonction logarithme népérien.)

On appelle \mathcal{C}_m la courbe représentative de f_m dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Étudier les variations de f_m .
 - Montrer que \mathcal{C}_m admet deux asymptotes dont l'une est indépendante de m .
 - Construire sur une même figure \mathcal{C}_1 et $\mathcal{C}_{\frac{1}{16}}$.
- Dans quelle transformation simple \mathcal{C}_1 a-t-elle pour image \mathcal{C}_m ?
- Discuter et résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f_m(x) = 0$.

EXERCICE 2

Déterminer les entiers naturels s'écrivant \overline{abca} dans le système de numération décimale, divisibles par 7 et congrus à 1 modulo 99.

PROBLÈME

N.B. Dans ce problème, les questions 2., 3. et 4. de la partie B peuvent être traitées indépendamment de A.

Dans un plan affine rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par A et B les points définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$.

Soit ν un réel donné; on construit une suite de points $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

A_0 est le barycentre de $(O, 1 + \nu)$ et $(A, -\nu)$;

A_1 est le barycentre de $(A_0, 1 + \nu)$ et $(O, -\nu)$;

A_{n+2} est le barycentre de $(A_{n+1}, 1 + \nu)$ et $(A_n, -\nu)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie A

On désigne par x_n l'abscisse de A_n .

- Démontrer que pour tout n de \mathbb{N} : $x_{n+1} = \nu x_n - \nu$.
- On suppose, dans cette question, $\nu = 1$.
Exprimer x_n en fonction de n et étudier la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On suppose $\nu \neq 1$.

- a. On pose pour tout n de \mathbb{N} : $X_n = x_n + \lambda$; déterminer λ pour que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit géométrique.
- b. Exprimer X_n puis x_n en fonction de n et ν .
- c. Étudier la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- d. Étudier les suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $\nu = 0$ et $\nu = -1$.

Partie B

1. Montrer qu'il existe une application affine unique f_ν du plan affine telle que

$$f_\nu(O) = A_0, \quad f_\nu(A) = O \quad \text{et} \quad f_\nu(B) = B.$$

Si φ_ν désigne l'endomorphisme associé à f_ν , donner la matrice de φ_ν dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

Si un point M du plan de coordonnées $(x ; y)$ a pour image par f_ν , le point M' de coordonnées $(x' ; y')$, donner les expressions de x' et y' en fonction de x , y et ν .

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_\nu(A_n) = A_{n+1}$.
3. Montrer que f_ν admet une droite de points invariants notée D_ν . Discuter, suivant les valeurs de ν , la position de D_ν .
4. Montrer que, quel que soit ν , la droite (OA) est stable par f_ν (i. e. $f_\nu(OA)$ est inclus dans (OA)).
On désigne par g_ν l'application de (OA) dans (OA) définie par $g_\nu(M) = f_\nu(M)$ pour tout point M de la droite (OA) . Discuter suivant les valeurs de ν la nature de l'application g_ν .
5. On suppose $\nu = 1$. Donner une construction géométrique simple de l'image d'un point du plan par f_ν . (On pourra utiliser l'application g_ν pour $\nu = 1$ définie précédemment.)
6. On suppose $\nu \neq 1$. Soit m la projection sur D suivant la direction de (OA) d'un point M quelconque du plan. Montrer qu'il existe un réel k tel que pour tout point M , $\overrightarrow{mf_\nu(M)} = k \overrightarrow{mM}$.

En déduire la nature de f_ν pour $\nu = 0$ et $\nu = -1$.