

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C 1985 Paris¹ ∞

EXERCICE 1

4 points

Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on considère l'équation :

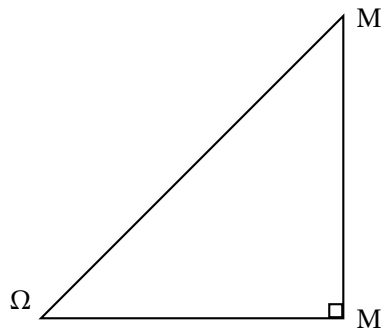
$$z^3 - (7 + 9i)z^2 + 7(-1 + 6i)z + 13 - 33i = 0. \quad (E)$$

1. Montrer que (E) admet une unique solution réelle et la déterminer.
2. a. Résoudre (E).
b. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C dont les affixes sont les solutions de (E). (On notera A celui dont l'abscisse est la plus grande).
Quelle est la nature du triangle ABC?
3. Soit (D) la droite d'équation $x = 6$, et (P) la parabole de directrice (D) et de foyer A.
Montrer que (P) contient B et C, préciser son sommet. Dessiner (P).

EXERCICE 2

5 points

Dans le plan P orienté, on considère trois points distincts Ω, M, M' formant un triangle isocèle, rectangle en M, et de sens direct.



1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S_Ω de centre Ω telle que $S_\Omega(M) = M'$.
2. Soit ABC un triangle du plan P, de sens direct. À l'extérieur du triangle ABC, on construit le triangle isocèle ABR rectangle en B, le triangle isocèle BCP rectangle en C et le triangle isocèle CAQ, rectangle en A.
On note $\mathcal{S}_P, \mathcal{S}_Q$ et \mathcal{S}_R les similitudes directes de rapport $\sqrt{2}$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ et de centres respectifs P, Q et R.

1. Paris, Créteil, Versailles

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f :

$$f = \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_P \circ \mathcal{S}_Q.$$

(On pourra chercher l'image de A par f .)

3. Dans cette question, on suppose donné un triangle PQR du plan P, et on cherche à construire un triangle ABC tel que les constructions de la question 2. redonnent ce triangle PQR.

a. Montrer que si un triangle ABC solution du problème existe, alors le point A est déterminé de manière unique.

Par quelles rotations peut-on obtenir C, connaissant P, Q et A, puis B connaissant les autres points?

En déduire qu'il existe un seul triangle ABC répondant à la question.

b. On veut maintenant construire ABC, dans le cas particulier où PQR est un triangle isocèle rectangle en Q de sens direct.

On note I le milieu de [PR], I' le symétrique de R par rapport à Q et S le symétrique de P par rapport à Q.

Déterminer $f(I)$; comparer les angles $(\widehat{QI}; \widehat{QI'})$ et $(\widehat{AI}; \widehat{AI'})$; en déduire que A appartient à un cercle que l'on précisera. Déterminer $f(Q)$; comparer les angles de droites $(\widehat{SQ}; \widehat{SR})$, et $(\widehat{AQ}; \widehat{AR})$; en déduire que A appartient à un autre cercle que l'on précisera.

Construire le triangle ABC. On fera une figure en prenant 8 cm comme longueur de [PQ].

PROBLÈME

11 points

Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type $f(x) = x$.

Partie A

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$$

et on note \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité 2 cm).

1. Déterminer la fonction dérivée $(f_n)'$ de f_n et donner l'expression de $(f_n)'$ en fonction de f_n et f_{n+1} .
2. Étudier les variations de f_n , et ses limites éventuelles en $-\infty, -1$ et $+\infty$. On distinguera les cas n pair et n impair.
3. Montrer que toutes les courbes \mathcal{C}_n passent par un même point.

4. Déterminer la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour les courbes \mathcal{C}_n ?
Tracer, sur deux figures distinctes, les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .
5. Pour tout entier n strictement positif, on note g_n la restriction de f_n à $] -\infty ; -1[$.
Quelle est l'image de g_n ? Montrer que g_n induit une bijection de $] -\infty ; -1[$ sur son image, dont on étudiera la fonction réciproque h_n (on distinguera les cas n pair et n impair).

Partie B

Pour tout entier strictement positif n , on note :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge.
2. Montrer que, pour tout entier n strictement positif,

$$\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. Déterminer, en utilisant la relation de la question A. 1, une relation entre I_n et I_{n+1} .
Montrer ensuite que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nI_{n+1}) = 1$.
En déduire que la suite $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et déterminer sa limite.

Partie C

Dans cette partie, $n = 2$.

1. Montrer que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1 \right]$.
Le but de la suite de cette partie est de déterminer une valeur approchée de α .
2. Étudier les variations de $(f_2)'$ dans $\left[\frac{1}{2} ; 1 \right]$ et en déduire qu'il existe un réel k appartenant à l'intervalle $] -1 ; 0[$ tel que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1 \right]$ on ait :

$$k \leq (f_2)'(x) \leq 0.$$

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & f_2(u_n), \end{cases} \text{ pour tout } n \text{ entier naturel.}$$

- a. Montrer que, pour tout entier n , u_n est élément de $\left[\frac{1}{2} ; 1 \right]$

- b. En remarquant que $u_{n+1} - \alpha = f_2(u_n) - f_2(\alpha)$, montrer en utilisant C 2. que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq |k| |u_n - \alpha|.$$

- c. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
4. En utilisant le sens de variation de f_2 dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ montrer que pour tout entier naturel n on a $(u_{n+1} - \alpha)(u_n - \alpha) < 0$.

En déduire que α est compris entre u_n et u_{n+1} .

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près, en justifiant la méthode employée.