

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Paris septembre 1971 ∞

EXERCICE 1

3 points

On considère l'entier naturel représenté, en base  $b$ , par

$$n = \overline{342x}.$$

Déterminer le chiffre  $x$  pour que ce nombre soit

1. divisible par 5 quand  $b = 6$ ;
2. divisible par 3 quand  $b = 7$ ;
3. divisible par 12 quand  $b = 17$ .

EXERCICE 2

5 points

Le plan (P) étant rapporté à un repère orthonormé d'axes  $Ox$ ,  $Oy$  (unité = 2 cm), tout point  $m(x; y)$  a pour affixe  $z = x + iy$ .

On note  $(P^*)$  l'ensemble des points de (P) d'affixe  $z$  non nulle, et l'on considère l'application  $f$  de  $(P^*)$  dans (P)

$$m \text{ (d'affixe } z) \longmapsto f(m) = M \left( \text{d'affixe } Z = z - \frac{1}{z} \right)$$

1. Exprimer les coordonnées  $X$  et  $Y$  du point  $M$  en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $m$ , puis en fonction du module  $r$  et de l'argument  $\theta$  de l'affixe  $z$  de  $m$ .
2. Montrer que la transformée par  $f$  d'un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R \neq 1$  est une ellipse; déterminer les foyers de cette ellipse.
3. Dessiner cette ellipse pour  $R = 2$ .

PROBLÈME

12 points

Dans un plan euclidien orienté, on donne un triangle équilatéral direct  $OO'O''$  de centre  $I$  et de côté égal à l'unité de longueur (direct veut dire que  $O'$  se déduit de  $O$  par la rotation de centre  $I$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ ). On désigne par  $\Omega$  le repère  $(O, \overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{OO''})$  d'origine  $O$  et de vecteurs unitaires  $\overrightarrow{OO'}$  et  $\overrightarrow{OO''}$  par  $\Omega'$  le repère  $(O', \overrightarrow{O'O''}, \overrightarrow{O'O})$ , par  $\Omega''$  le repère  $(O'', \overrightarrow{O''O}, \overrightarrow{O''O'})$ . On appelle  $E$  l'ensemble des points intérieurs au triangle  $OO'O''$  (y compris les points des côtés). Soit  $e$  l'ensemble des triplets  $(a, b, c)$  de nombres réels positifs ou nuls et tels que

$$a + b + c = 1.$$

À tout triplet de  $e$ , on associe le triplet  $(A, B, C)$  des points du plan dont les coordonnées par rapport au repère  $\omega$  sont  $(b; c)$  pour  $A$ ,  $(c; a)$  pour  $B$  et  $(a; b)$  pour  $C$ .

1. **a.** Démontrer que l'application  $f$  de  $e$  dans le plan, qui, au triplet  $(a, b, c)$ , associe le point A, est une bijection de  $e$  sur E.
- b.** Démontrer que
- la rotation  $R\left(I, \frac{2\pi}{3}\right)$  de centre I et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  transforme le repère  $\Omega$  en le repère  $\Omega'$  ;
  - si un point a pour coordonnées  $(x; y)$  relativement à  $\Omega$ , alors il a  $(y; 1-x-y)$  pour coordonnées relativement à  $\Omega'$  ;
  - les coordonnées du point A relativement à  $\Omega'$  sont  $(c; a)$ .

- c.** Quel est le point dont le transformé par  $R\left(I, \frac{2\pi}{3}\right)$  est le point A ?

En déduire que le triangle ABC est équilatéral indirect.

2. Trouver et dessiner l'ensemble  $(D)$  des points A, B et C correspondant aux triplets  $(a, b, c)$  de  $e$  tels que  $|b - c| = \frac{1}{2}$ .
3. On se propose de trouver l'ensemble  $(G)$  des points A, B et C correspondant aux triplets de  $e$  tels que  $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}$ .

- a.** Montrer que le carré scalaire  $\|\vec{V}\|^2$  d'un vecteur  $\vec{V}$ , de coordonnées  $(x; y)$  par rapport au repère  $\Omega$ , est

$$\|\vec{V}\|^2 = x^2 + y^2 + xy.$$

- b.** Calculer les coordonnées, par rapport à  $\Omega$ , du vecteur  $\vec{IA}$ .

- c.** Calculer  $IA^2$  et montrer que, pour les triplets considérés dans cette question,  $\|\vec{IA}\|^2$  est constant. Dessiner avec précision l'ensemble  $(G)$  cherché.

4. Soit  $(a_0, b_0, c_0) \in e$ ; on considère le triplet  $(a_1, b_1, c_1)$  défini par

$$a_1 = \frac{1}{2}(b_0 + c_0), \quad b_1 = \frac{1}{2}(c_0 + a_0), \quad c_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0),$$

puis, par récurrence, les triplets  $(a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), \dots, (a_n, b_n, c_n), \dots$  en posant

$$a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + c_{n-1}), \quad b_n = \frac{1}{2}(c_{n-1} + a_{n-1}) \text{ et } c_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}).$$

- a.** Vérifier que, quel que soit  $n$ , on a  $(a_n, b_n, c_n) \in e$ .
- b.** On appelle alors  $A_n B_n C_n$  le triangle associé au triplet  $(a_n, b_n, c_n)$  de même que ABC était associé à  $(a, b, c)$ .  
Quel est le point  $A_1$  pour le triangle  $A_0 B_0 C_0$ ? En déduire que  $A_1$  se déduit de  $A_0$  par une homothétie, que l'on précisera.
- c.** Que peut-on dire des points  $A_n, B_n$  et  $C_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini?  
Que peut-on en déduire pour les nombres  $a_n, b_n, c_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini?