Baccalauréat C Paris septembre 1972

EXERCICE 1

Calculer les intégrales

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

EXERCICE 2

Soit (E) un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2, et une base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ de (E), et soit a un nombre réel, fixé.
Montrer que, parmi toutes les applications linéaires f de (E) dans lui-même pour lesquelles $f\left(\overrightarrow{\imath}\right) = a\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$, il en existe une, et une seule, telle que $(f \circ f)\left(\overrightarrow{\imath}\right) = f\left(\overrightarrow{\imath}\right)$; on montrera à cet effet qu'on peut déterminer $f\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$.
Vérifier que, pour cette application, $(f \circ f)\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = f\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$; comparer $f \circ f$ et f ; vérifier alors que, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de (E), le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} - f\left(\overrightarrow{u}\right)$ appartient au noyau de f.

PROBLÈME

N. B. - Les paragraphes **a, b** et **c** de la deuxième question peuvent être traités indépendamment du reste du problème.

On désigne par (P) le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy (unité de longueur : 3 cm).

1. a. Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = (x-1)\sqrt{2x}.$$

Quel est son domaine de définition ? Est-elle dérivable en tout point de ce domaine ?
Étudier la variation de cette fonction f et tracer dans (P) la portion (C_1) de sa courbe représentative correspondant aux valeurs de x telles que $0 \leqslant x \leqslant 2$.

b. Soit (C) l'ensemble des points M de (P) dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation

$$y^2 - 2x(x-1)^2 = 0 \quad \text{à la condition } 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

Montrer que (C) est l'union de (C_1) et d'une courbe (C_2), que l'on dessinera, déduite de (C_1) par une transformation simple de (P).
Préciser les coordonnées des points communs à (C) et à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

c. Soit (Γ) l'ensemble des points M de (P) dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation

$$\left(y^2+4x^2\right)^2-4x^2\left(x^2+1\right)^2=0 \quad \text{et à la condition } -2\leqslant x\leqslant 2.$$

Montrer que (Γ) est l'union de (C) et d'une courbe (C'), transformée de (C) dans une symétrie, que l'on précisera.

Dessiner (Γ) sur une figure distincte de la figure utilisée aux paragraphes **a** et **b**.

d. On considère enfin l'ensemble $\left(\Gamma'\right)$ des points M de (P) dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation et à la condition $-2\leqslant x\leqslant 2$.

Montrer que (Γ') se déduit de (Γ) par une symétrie, que l'on précisera (on ne dessinera pas (Γ), dans cette question).

2. **a.** À tout nombre complexe non nul, α, on associe l'application f_α, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par

$$f_\alpha(z)=\alpha z$$

et l'application g_α de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $g_\alpha(z)=\alpha\overline{z}$, où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les applications f_α et g_α ainsi définies.

Soit λ et μ deux nombres complexes non nuls, distincts ou non.

Déterminer les images de z par les applications composées

$$f_\mu\circ f_\lambda,\quad g_\mu\circ g_\lambda,\quad g_\mu\circ f_\lambda \text{ et } f_\mu\circ g_\lambda$$

et vérifier que ces applications composées appartiennent à $\mathcal{E}$.

Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ constitue un groupe pour la composition des applications (on précisera l'application réciproque de f_λ et celle de g_λ.

b. Montrer que l'ensemble $K=\{1,\,-1,\,\mathrm{i},\,-\mathrm{i}\}$ est un groupe pour la multiplication.

En déduire que l'ensemble (E) des huit applications f_1, f_{-1}, f_{i}, $f_{-\mathrm{i}}$, g_1, g_{-1}, g_{i}, $g_{-\mathrm{i}}$ est un groupe pour la composition des applications (sous-groupe de $\mathcal{E}$) ; on ne demande pas d'écrire la table de ce groupe.

c. À chaque application f_α correspond une transformation T_α du plan (P) qui à M d'affixe z associe le point $T_\alpha(M)$ d'affixe $f_\alpha(z)$.

De même à chaque application g_α correspond une transformation S_α du plan (P) qui à M d'affixe z associe le point $S_\alpha(M)$ d'affixe $g_\alpha(z)$.

Quelle est la nature géométrique des transformations T_α et S_α ?

Préciser la nature géométrique des huit transformations T_1, T_{-1}, T_{i}, $T_{-\mathrm{i}}$, S_1, S_{-1}, S_{i}, $S_{-\mathrm{i}}$ qui correspondent aux huit applications de (E).

Déduire du 2. b. que ces huit transformations forment un groupe (G) pour la composition des transformations.

d. Vérifier que l'ensemble $(\Gamma)\cup(\Gamma')$ de la première question est invariant par l'une quelconque des transformations du groupe (G).

En remarquant que $T_i=S_i\circ S_1$, montrer que T_i transforme (Γ) en (Γ').

Dessiner alors (Γ') sur le même graphique que (Γ) (le candidat pourra utiliser à cet effet l'une ou l'autre des transformations S_i et T_i à son choix).