Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Paris septembre 1975 ∾

EXERCICE 1

On désigne par n un entier naturel non nul, par $n!$ le produit des n premiers entiers naturels non nuls, et par a_n le produit $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ des n premiers entiers naturels impairs. Démontrer l'égalité

$$a_n n! \cdot 2^n = (2n)!$$

En déduire que le produit $(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n$ est divisible par 2^n et que, pour tout entier naturel p tel que ce produit soit divisible par 2^p, on a $p \leqslant n$.

EXERCICE 2

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$ d'axes Ox, Oy.
On considère l'application f du plan P dans lui-même qui associe à un point m de P d'affixe $z = x + \text{i}y$ le point M dont l'affixe Z est égale à z^2.
Exprimer en fonction des coordonnées x, y de m les coordonnées X, Y de M.
Trouver et dessiner l'image $f(d)$ de la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$; préciser les éléments caractéristiques de la courbe $f(d)$ permettant d'en donner une définition géométrique simple,.
Montrer qu'il existe une autre droite, notée d', telle que $f\left(d'\right) = f(d)$.

PROBLÈME

On considère un espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$, et l'on désigne par i l'application identique de $\mathcal{E}$ dans lui-même, et par θ l'application nulle, dans laquelle tout vecteur de $\mathcal{E}$ a pour image le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$, de $\mathcal{E}$.
On rappelle que, si φ et φ' sont deux applications linéaires de $\mathcal{E}$ dans lui-même, $\varphi + \varphi'$ est l'application linéaire dans laquelle tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de $\mathcal{E}$ a pour image le vecteur $\varphi(x) + \varphi'(x)$, et que si λ est un nombre réel, $\lambda.\varphi$ est l'application linéaire dans laquelle $\overrightarrow{x}$ a pour image $\lambda \cdot \varphi(x)$.
On convient de noter φ^2 l'application composée $\varphi \circ \varphi$, φ^3 l'application $\varphi \circ \varphi^2$, et de façon générale φ^n l'application $\varphi \circ \varphi^{n-1}$ (n entier supérieur à 1).

1. On désigne par j une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, distincte de o et telle que $j^2 = o$ (on admettra l'existence de telles applications, qui sera prouvée au 4. pour un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension 3).

À tout couple $(a~;~b)$ de nombres réels on associe l'application linéaire $ai + bj$, notée f, de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de ces applications f.

  a. Montrer que $\mathcal{F}$, muni de l'addition des applications et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont $(i,~j)$ est une base.

  b. Quelle est l'application linéaire composée de $ai + bj$ et de $a'i + b'j$?
  Déduire du résultat que $\mathcal{F}$, muni de l'addition et de la composition des applications, est un anneau commutatif. Quels sont ses « diviseurs de zéro » ?

2. Soit f une application *donnée* de $\mathscr{F}$, de coordonnées a, b dans la base (i, j), et soit n un nombre entier supérieur à 1.

a. Déterminer les coordonnées de f^n dans la base $(i,\ j)$.

b. À quelle condition f admet-elle dans $\mathscr{F}$ une application réciproque? (On la notera f^{-1}).

On pose alors $f^0 = i$ et $f^{-n} = \left(f^{-1}\right)^n$.

Préciser les coordonnées de f^{-n} dans la base $(i,\ j)$. Vérifier que, pour tout entier relatif m,

$$f^m = a^p mi + mba^{m-1} j.$$

3. On appelle Π un plan affine, rapporté à un repère $\mathscr{R}$ d'axes Ox, Oy, et l'on considère l'application p de $\mathbb{Z}$ dans Π par laquelle l'entier relatif m a pour image le point $p(m)$ de Π dont les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ sont

$$\left\{\begin{array}{lll} x_m & = & a^m \quad \text{et} \\ y_m & = & mba^{m-1}. \end{array}\right.$$

On se propose d'étudier cette application lorsque a est donné, différent de 0, et $b = a\text{Log}\,|a|$ (le symbole Log désignant le logarithme népérien).

a. Montrer que tous les points $p(m)$ appartiennent à la courbe Γ de Π d'équation $y = x\text{Log}\,|x|$. (On pourra étudier successivement les cas $a > 0$ et $a < 0$).

b. Etudier la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $h(x) = x\text{Log}\,|x|$, et tracer la courbe Γ, en supposant le repère orthonormé et en prenant pour unité de longueur 5 cm.

c. Comparer les demi-droites Δ_m et Δ_{-m} d'origine O contenant respectivement les points $p(m)$ et $p(-m)$.

Rechercher si x_m et y_m admettent des limites lorsque m tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$.

Marquer sur Γ les points $p(m)$ correspondant aux valeurs -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 de l'entier m, en prenant successivement :

$$\begin{array}{lllll} a & = & \dfrac{5}{4} & \text{[on notera alors } P_m \text{ les points } p(m)], \\ a & = & \dfrac{4}{5} & \text{[on notera alors } P'_m \text{ les points } p(m)] \\ a & = & -\dfrac{5}{4} & \text{[on notera alors } Q_m \text{ les points } p(m)] \end{array}$$

4. On suppose dans cette question que l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ est de dimension 3.

a. Soit $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right)$ une base de $\mathscr{E}$, et soit g l'application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lll} g(u) & = & 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, \\ g(v) & = & -2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \\ g(w) & = & 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}. \end{array}\right.$$

Calculer $g^2(u), g^2(v), g^2(w)$, et préciser ce qu'est l'application g^2.

b. On désigne (comme au 1.) par j une application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, distincte de l'application nulle o, et telle que $j^2 = o$. On note $\mathscr{N}$ le noyau de j.

Montrer successivement que :

— $\mathscr{E}$ est différent de $\mathscr{E}$,

— $\mathscr{N}$ est différent de $\{0\}$,

— $\mathscr{E}$ n'est pas une droite vectorielle de $\mathscr{E}$; (on pourra, à cet effet, partir de l'hypothèse que $\mathscr{N}$ est une droite vectorielle D, prendre une base $\left(\overrightarrow{\alpha},\ \overrightarrow{\beta},\ \overrightarrow{\gamma}\right)$ de $\mathscr{E}$ avec $\overrightarrow{\gamma} \in D$, étudier alors le noyau de j et aboutir à une contradiction).

Conclure, en prenant un vecteur $\overrightarrow{U}$ de $\mathscr{E}$ n'appartenant pas à $\mathscr{N}$, qu'il existe une base $\left(\overrightarrow{U},\ \overrightarrow{V},\ \overrightarrow{W}\right)$ de $\mathscr{E}$ telle que j soit définie par

$$j\left(\overrightarrow{U}\right) = \overrightarrow{V},\ j\left(\overrightarrow{V}\right) = \theta,\ j\left(\overrightarrow{W}\right) = \theta.$$