

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Paris–Créteil–Versailles¹ septembre 1985 ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on considère l'équation :

$$z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i = 0.$$

- a. Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer ;
b. Achever la résolution de l'équation (E).
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, représenter les points A, B et C d'affixes respectives $1 + 2i$, $3i$, $-2 + 3i$.
Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 , 1.
Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs \overrightarrow{GA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} .
Montrer qu'elles forment une suite géométrique dont on déterminera la raison complexe.
En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

EXERCICE 2

4 points

Soit ABC un triangle (de sens direct) ayant ses trois angles aigus.

1. Construire les cercles C_a , C_b et C_c tels que :
- $C_a - \{C, B\}$ soit l'ensemble des points P tels que $\text{mes} \left(\widehat{(\overline{PC}), \overline{PB}} \right) = \frac{\pi}{3}$.
 $C_b - \{A, C\}$ soit l'ensemble des points Q tels que $\text{mes} \left(\widehat{(\overline{QA}), \overline{QC}} \right) = \frac{\pi}{3}$.
 $C_c - \{B, A\}$ soit l'ensemble des points R tels que $\text{mes} \left(\widehat{(\overline{RB}), \overline{RA}} \right) = \frac{\pi}{3}$.
(on pourra utiliser les triangles équilatéraux construits à l'extérieur du triangle ABC et dont un côté est [CB], [AC] ou [BA]).
Démontrer que C_a , C_b et C_c ont un point commun, noté I.
2. Soit P un point de C_a extérieur au triangle ABC. La droite (PC) recoupe C_b en un point Q. Soit R le point d'intersection des droites (QA) et (PB). Montrer que R est un point de C_c .
Quelle est la nature du triangle PQR?
3. À chaque triangle PQR on associe :

$$\ell(\text{QR}) = \text{IP} + \text{IQ} + \text{IR}.$$

1. Amiens, Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes, Rouen

- a. Déterminer P pour que IP soit maximum. Soit P_0 ce point.
 Construire le triangle $P_0Q_0R_0$ obtenu à partir de P_0 .
- b. Montrer que $I(PQR)$ est maximum pour $P_0Q_0R_0$.

N. B. - La notation $(\widehat{\Delta, \Delta'})$ désigne l'angle du couple de droites (Δ, Δ') .

On note $\text{mes}(\widehat{\Delta, \Delta'})$ l'image de cet angle par la mesure choisie pour cet exercice, qui a pour ensemble $[0; \pi[$.

PROBLÈME

12 points

Le but du problème est l'étude d'une fonction définie par une intégrale qu'on ne sait pas calculer explicitement.

On considère la fonction numérique f , définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f(x) &= \frac{x}{x-1} \text{ pour tout } x \text{ non nul} \end{cases}$$

\mathcal{C} désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 2 cm).

Partie A

1. a. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
 b. Étudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R}^* , et calculer $f'(x)$ pour tout x non nul.
 c. On rappelle que pour tout réel x ,

$$e^x - x - 1 = x^2 \left(\frac{1}{2} + \epsilon(x) \right).$$

où ϵ est une fonction de limite nulle en zéro.

Montrer que pour tout x non nul :

$$\frac{f(x) - 1}{x} = - \frac{\frac{1}{2} + \epsilon(x)}{1 + \frac{1}{2}x + x\epsilon(x)}.$$

En déduire que $\frac{f(x) - 1}{x}$ tend vers $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 0.

Interpréter ce résultat.

2. a. On note g l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$g(x) = e^x - xe^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de g , puis le signe de g . En déduire, pour tout x non nul, le signe de $g'(x)$.

- b. Acheter l'étude des variations de f .

- c. Préciser les droites asymptotes à \mathcal{C} et construire \mathcal{C} (on donnera des valeurs approchées de $f(-1)$, $f(\ln 3)$, $f(2\ln 3)$ à 10^{-3} près).

Partie B

1. a. Justifier, pour tout réel x , l'existence de

$$H(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

On a donc défini une fonction H de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Il ne s'agit en aucun cas de « calculer » $H(x)$. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction H dans un repère orthonormé.

- b. Soit F une primitive de f sur \mathbb{R} . Exprimer H au moyen de F . En déduire que H est dérivable sur \mathbb{R} . Montrer que pour tout x non nul, on a

$$H'(x) = \frac{x}{e^{2x} - 1} (3 - e^x).$$

- c. Étudier le sens de variation de la fonction H .
2. a. Montrer, en utilisant l'inégalité de la moyenne, que si x est non nul $H(x)$ est compris entre $f(x)$ et $f(2x)$ (distinguer les cas $x > 0$ et $x < 0$).
- b. Étudier la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- c. Étudier la limite $\frac{H(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$; en déduire la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
- d. Interpréter les résultats précédents pour la courbe Γ .

3. Quelle aire représente $H(\ln 3)$?

Déterminer un encadrement de $H(\ln 3)$ par la méthode des rectangles en utilisant la subdivision $\left(\ln 3, \frac{4}{3}\ln 3, \frac{5}{3}\ln 3, 2\ln 3\right)$.

On utilisera des valeurs approchées à 10^{-3} près des images par f des termes de la subdivision donnée.

4. Donner, en tenant compte des résultats précédents le tableau de variation de H , puis indiquer l'allure de Γ .

- Certains calculs nécessitent l'utilisation d'une calculatrice électronique.
- Les courbes des parties A et B seront tracées sur du papier millimétré dans deux repères orthonormés différents.