

## ☞ Baccalauréat C Paris–Créteil–Versailles septembre 1979 ☞

### EXERCICE 1

3 POINTS

Dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  on donne par leurs coordonnées le système de points :  $A(0; 1)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(-1; 0)$ . Ces points sont pondérés et affectés des coefficients respectifs  $1, b, c$ .

1. Discuter l'existence du barycentre  $G$  de ce système de points suivant les valeurs de  $b$  et  $c$ .  
Quelles sont alors les coordonnées de  $G$ ?
2. Le couple  $(b; c)$  est obtenu de la manière suivante :  
 $b$  est le résultat du premier jet d'un dé dont les faces portent les nombres  $-3, -2, -1, +1, +2, +3$ ;  
 $c$  est le résultat du deuxième jet du même dé.  
Chaque couple a la même probabilité d'apparition.
  - a. Quelle est la probabilité pour que le système de points pondérés admette un barycentre  $G$  dont l'ordonnée est égale à 1?
  - b. Question analogue en imposant au barycentre  $G$  d'avoir une abscisse nulle.
  - c. Question analogue en imposant au barycentre  $G$  d'appartenir à l'une ou l'autre des bissectrices des axes du repère.

### EXERCICE 2

5 POINTS

Soit un plan affine euclidien orienté  $P$  muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On donne le nombre complexe  $a = \cos\theta + i\sin\theta$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) et on désigne par  $F$  l'application de  $P$  dans lui-même qui au point  $M$  d'affixe le nombre complexe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = z + az$ .

1. On désigne par  $M_1$  le point d'affixe  $a\bar{z}$ . Donner la nature et la détermination géométrique de l'application  $F_1$  de  $P$  dans  $P$  qui transforme  $M$  en  $M_1$ .
2. Montrer que  $F$  est la composée de deux applications simples que l'on précisera.  
Déterminer  $F(P)$  (on pourra construire sur une figure les points  $M, M_1, M'$ ).
3. Déterminer l'ensemble des images dans  $P$  des solutions de l'équation :

$$z + a\bar{z} = 2 \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

soit en utilisant la transformation  $F$ , soit par le calcul.

### PROBLÈME

12 POINTS

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \text{Log} \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

où  $\text{Log}$  désigne la fonction logarithme népérien.

**Partie A**

1. Étudier les variations de  $f$  et montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$ .
2. Dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , tracer la courbe  $C$  d'équation  $y = f(x)$ . Déterminer les asymptotes de  $C$ .

**Partie B**

On désigne par  $t$  la dérivée de  $f$  :  $t = f'$ .

1. a. Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $|t(x)| < 1$ .  
 b. Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $t'(x) = 1 - [t(x)]^2$ , en désignant par  $t'$  la dérivée de  $t$ .  
 c. Montrer que si  $x \in ]-1; +1[$ , il existe un réel unique  $X$  tel que  $t(X) = x$ ; on explicitera  $X$  en fonction de  $x$  et on notera  $X = t^{-1}(x)$ .  
 Montrer que  $t(\mathbb{R}) = ]-1; +1[$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $X \in \mathbb{R}_+$ . On pose :

$$I_n(X) = \int_0^X [t(u)]^n du = \int_0^X [f'(u)]^n du.$$

On conviendra que, pour tout  $u$  de l'intervalle  $[0; X]$ ,  $[t(u)]^0 = 1$ .

- a. Justifier l'existence de  $I_n(X)$ .
- b. Calculer  $I_0(X)$  et  $I_1(X)$ .
- c. La question B 1. b donnant  $[t(u)]^2 = 1 - t'(u)$ , montrer que pour tout  $n \geq 2$  :

$$I_n(X) = I_{n-2}(X) - \frac{1}{n-1} [t(X)]^{n-1}.$$

- d. Dédurre de ce qui précède que pour tout entier naturel  $p \geq 1$

$$I_{2p}(X) = X - \left[ t(X) + \frac{1}{3} [t(X)]^3 + \dots + \frac{1}{2p-1} [t(X)]^{2p-1} \right] \quad (E_1)$$

$$I_{2p+1}(X) = \text{Log} \left( \frac{e^X + e^{-X}}{2} \right) - \left[ \frac{1}{2} [t(X)]^2 + \dots + \frac{1}{2p} [t(X)]^{2p} \right] \quad (E_2)$$

- e. Montrer que l'on a pour tout entier naturel  $p$  :

$$0 \leq \int_0^X [t(u)]^{2p} du \leq X [t(X)]^{2p}$$

En déduire,  $X$  étant fixé, que la suite :

$$p \longmapsto \int_0^X [t(u)]^{2p} du$$

est convergente et donner sa limite.

**Partie C**

1. En utilisant la relation (E<sub>1</sub>) et en posant  $X = t^{-1}(x)$ , démontrer que pour tout  $x$  fixé,  $x \in ]0 ; 1[$ , la suite  $p \mapsto \epsilon_p(x)$  définie par :

$$t^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2p-1}}{2p-1} + \epsilon_p(x) \quad (\text{E}_3)$$

a pour limite 0.

En déduire un résultat analogue pour  $x \in ]-1 ; 0[$ .

2. En utilisant la relation (E<sub>3</sub>) pour  $x = \frac{1}{3}$  et  $p = 3$ , donner une valeur approchée  $a$  de  $\text{Log } 2$ ; comparer à la valeur obtenue dans les tables; donner une majoration de  $\text{Log } 2 - a$ .