

♣ Baccalauréat C septembre 1981 Paris¹ ♣

EXERCICE 1

1. Déterminer les suites géométriques non constantes d'entiers strictement positifs telles que la somme de leurs quatre premiers termes soit égale à 40.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_n = 3^n$ pour tout entier naturel n .
Quelle est la plus petite valeur n_0 de n telle que la somme $\sum_{i=0}^{i=n} u_i$ soit supérieure à 10^3 ?
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $\mu_n = \text{P.G.C.D.}(u_n + 1, u_{2n} + 1)$, où u_n est le terme général de la suite définie au 2.

EXERCICE 2

Soit P un plan affine euclidien. Si M et N sont deux points de ce plan, on note MN leur distance.

1. Soit A, B, C trois points de P tels que

$$AB = AC = 5 \quad \text{et} \quad BC = 6.$$

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. On désigne par G le barycentre de $(A, 2), (B, 3), (C, 3)$.
Construire le point G et calculer la distance GA .
3. On considère l'application f de P dans \mathbb{R} qui à tout point M de P associe le réel

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

Démontrer que l'on a pour tout point M de P :

$$f(M) = f(G) + 4MG^2.$$

Calculer numériquement $f(A)$ et $f(G)$.

4. Déterminer et construire l'ensemble E des points M tels que $f(M) = f(A)$.

EXERCICE 3

Soit P un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

À tout nombre complexe $z = x + iy$, x et y désignant des réels, on associe son image m , de coordonnées $(x; y)$, dans P .

Soit λ un complexe non nul. On désigne par :

ω_λ et A_λ les images dans P des nombres λ et 2λ ;

P_λ le plan P privé du point ω_λ ;

1. Créteil, Versailles

D_λ la droite (O_λ) privée du point ω_λ ;

Δ_λ la droite perpendiculaire à D_λ en ω_λ privée de ω_λ ;

Ω_λ le cercle de centre ω_λ passant par O.

On se propose d'étudier la famille des applications φ_λ de P_λ dans P qui au point m image de z associent le point n image de u tel que

$$u = \frac{z^2}{2(z - \lambda)}.$$

Partie A

Soit f et g les fonctions de variable réelle qui à x associent respectivement

$$f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2-1}{2x}.$$

Étudier les variations des fonctions f et g et représenter graphiquement ces fonctions sur une même figure, dans un plan muni d'un repère orthonormé. Étudier les asymptotes des courbes représentatives.

Partie B

Dans toute cette partie on choisit $\lambda = 1$.

- Déterminer les points invariants de φ_1 .
- Déterminer $\varphi_1(D_1)$ et $\varphi_1(\Delta_1)$.
- Soit m un point du cercle Ω . Montrer que $\varphi_1(m)$ se déduit simplement de m .
En déduire $\varphi_1(\Omega_1)$. (On pourra repérer la position de m sur Ω par le réel θ , détermination de la mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{\omega_1 m_1})$.)
- Déterminer l'ensemble des points m de P_1 dont l'image par φ_1 est un point de la droite (O, \vec{u}) .
- Soit n un point de P non invariant par φ_1 ; montrer que n a deux antécédents m et m' par φ_1 , et que ces points vérifient les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} n \text{ est le milieu du segment } [m, m'] \\ \|\overrightarrow{\omega_1 m}\| \times \|\overrightarrow{\omega_1 m'}\| = 1 \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\omega_1 m}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\omega_1 m'}) = \hat{0} \quad (\hat{0} \text{ désigne l'angle nul}). \end{array} \right.$$

Vérifier que ces propriétés restent valables lorsque m et m' sont confondus en un point invariant de φ_1 . Retrouver une partie des résultats des questions 2. et 3.

Partie C

On suppose que λ est un complexe quelconque non nul.

Soit S_λ la similitude plane directe du plan P qui admet O pour centre et qui transforme ω_1 en ω_λ .

- Démontrer $\varphi_\lambda = S_\lambda \circ \varphi_1 \circ S_\lambda^{-1}$.
- Déterminer $\varphi_\lambda(\Omega_\lambda)$.