Durée : 4 heures

Baccalauréat C Paris septembre 1983

EXERCICE 1

Soit E l'espace rapporté à un repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$; on appelle P le plan vectoriel de base (i , j) et D et Ll les droites de E définies par les équations :

$$\text{D} : \left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1\\ y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \Delta : \left\{\begin{array}{l c l} x & = & 2+y\\ z & = & 1-y \end{array}\right.$$

On appelle f la projection Sur D de direction $\overrightarrow{\text{P}}$ et g la projection sur Δ de direction $\overrightarrow{\text{P}}$.
Soit h l'application de E dans E qui à tout point M associe le point M_1 barycentre des points $M' = f(M)$ et $M'' = g(M)$ affectés respectivement des coefficients λ et $1-\lambda,\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer les coordonnées de M' et M'' en fonction de celles de M.
2. Déterminer la nature de h et préciser ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

Soit un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$; à tout point M de Coordonnées $(x~;~y)$ on associe son affixe $z = x+\text{i}y$.
On donne trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c non nulles et trois points P, Q, R d'affixes respectives

$$p = \frac{|a|}{a},\quad q = \frac{|b|}{b},\quad r = \frac{|c|}{c}$$

1. Soit H le point défini par $\overrightarrow{\text{OH}} = \overrightarrow{\text{OP}} + \overrightarrow{\text{OQ}} + \overrightarrow{\text{OR}}$.
   a. Montrer que H est l'orthocentre du triangle PQR.
   b. Montrer que le triangle PQR est équilatéral si, et seulement si, $p+q+r = 0$.
2. On suppose dans cette question que $p+q+r = 0$.
   a. Montrer que pour tout point M d'affixe z on a

$$|z-a|+|z-b|+|z-c| \geqslant |a|+|b|+|c|$$

   b. En déduire qu'il existe un point M tel que $M\text{A} + M\text{B} + M\text{C}$ soit minimum.

PROBLÈME

Partie A

1. m est un nombre réel donné. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :

$$(E_m)\left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R}\\ \text{e}^x(2-x) = m \end{array}\right.$$

2. On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0 \\ f(x) & = & \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \end{array}\right.$$

a. Montrer que f est dérivable. On étudiera soigneusement la dérivabilité de f en 0, où on précisera le nombre dérivé.

b. Quelle est la fonction dérivée de f ? Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $f'(a) = 0$. Montrer que $f(a) = a(2 - a)$.

Montrer que $a \in]1,59 ; 1,6[$.

c. Étudier les variations de f. Construire la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on prendra 2 cm pour unité).

3. On pose, pour tout réel positif x

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

a. Est-ce légitime ?

On a ainsi défini deux applications de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$, notées F et G.

b. Calculer $G(x)$. Montrer que G admet une limite en $+\infty$ et calculer cette limite.

On ne cherchera en aucune manière à calculer $F(x)$.

c. Prouver qu'il existe un réel h tel que :

$$(\forall t)\ \left(t \in]h ; +\infty[\Rightarrow f(t) \leqslant 2t^2\mathrm{e}^{-t}\right).$$

En déduire que F est une fonction bornée.

Montrer que F est une fonction croissante.

On admet que les résultats des questions 3. d et 3. e permettent de conclure que F admet une limite en $+\infty$. Cette limite est notée L.

Le but de la partie B est d'obtenir, son existence étant admise, une valeur approchée de L.

Partie B

1. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout réel non nul x on a

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} + \cdots + \mathrm{e}^{-(k-1)x} + \mathrm{e}^{-kx} + \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout réel positif x on a

$$0 \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a(2-a)}{k}.$$

c. En intégrant par parties, calculer, k étant un entier naturel non nul et x un réel positif donnés, l'intégrale :

$$I_k(x) = \int_0^x t^2 \mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t$$

dont on justifiera l'existence.

d. Montrer que la fonction I_k définie ci-dessus admet une limite en $+\infty$. Calculer cette limite.

2. a. Montrer que pour tout réel positif x on a

$$\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = F(x) - \sum_{p=1}^{p=k} I_p(x)$$

En déduire que la fonction qui à tout réel positif x associe l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$ a une limite en $+\infty$. On notera ℓ_k cette limite.

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul k on a

$$\mathrm{L} - I_k = 2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{k^3}\right)$$

c. En utilisant la majoration obtenue au B 1. b, montrer que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

d. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général :

$$u_k = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{k^3}$$

est convergente et a pour limite le réel L$'$ tel que L = 2L$'$.

3. a. Trouver une condition, portant sur l'entier naturel k, suffisante pour que $I_k \leqslant 0,1$.

b. En déduire $2,3 \leqslant \mathrm{L} \leqslant 2,5$.