

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Paris Créteil et Versailles ∞

EXERCICE 1

4 points

Pour chaque couple (a, q) d'entiers naturels tels que $1 \leq q \leq a$ on note b_q le quotient dans la division euclidienne de a par q .

On appelle S_q l'ensemble des entiers naturels non nuls b tels que s soit le quotient dans la division euclidienne de a par b .

1. On suppose dans cette question que $a = 1982$.
 - a. Déterminer $b_1 ; b_8 ; b_9 ; b_{1982}$.
 - b. Soit b un entier naturel non nul. Démontrer que $b \leq b_8$ si, et seulement si, $8b \leq 1982$, démontrer que $b > b_9$ si, et seulement si, $9b > 1982$.
 - c. En déduire que $S_8 = \{b \in \mathbb{N} ; b_9 < b \leq b_8\}$. Déterminer le cardinal de S_8 .
2. On suppose que a est quelconque et que $1 \leq q < a$.
 - a. Démontrer que $S_q = \{b \in \mathbb{N} ; b_{q+1} < b \leq b_q\}$.
 - b. Démontrer que $\forall a \geq 1$.

$$\sum_{q=1}^a \text{Card.}(S_q) = a$$

où $\text{Card}(S_q)$ désigne le cardinal de S_q .

EXERCICE 2

4 points

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension trois, muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

et \mathcal{E} un espace affine associé muni du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne l'application f_α de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui au point M de coordonnées $(x ; y ; z)$ associe le point $f_\alpha(M) = M'$ de coordonnées $(x' ; y' ; z')$ définies par

$$\begin{cases} x' &= -z + \alpha \\ y' &= -x \\ z' &= y - 2 \end{cases}$$

Où α est un réel donné,

1. Montrer que f_α est un déplacement que l'on caractérisera.
2. Pour quelle valeur de α ce déplacement f_α est-il une rotation ?
Préciser dans ce cas l'axe de rotation.
3. On suppose dans cette question que $\alpha = 1$.
Montrer que f_1 est un vissage dont on précisera l'axe.

PROBLÈME**12 points**

Pour chaque entier k strictement positif, on définit une application f_k de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à tout x associe

$$f_k(x) = \frac{x^k}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

On appelle f_0 l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à tout x associe $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

1. a. Démontrer que pour chaque $k \geq 1$, la fonction f_k est croissante sur \mathbb{R}_+ ; en déduire, suivant la parité de l'entier k , le sens de variation des fonctions f_k .
 - b. Étudier, en discutant suivant les valeurs de $k \geq 1$, les limites de $f_k(x)$ et de $\frac{f_k(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour les branches infinies des courbes représentatives \mathcal{C}_k des fonctions f_k ?
 - c. Démontrer que les courbes \mathcal{C}_k passent par deux points fixes; construire sur une même figure et dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.
On précisera, s'il y a lieu, les asymptotes. (On prendra 2 cm pour unité.)
2. Soit $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$I_k = \int_0^1 f_k(x) dx.$$

- a. Démontrer que la fonction $x \mapsto \text{Log}(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ (Log désigne la fonction logarithme népérien).
En déduire la valeur de I_0 .
- b. Calculer I_1 .
- c. Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a la relation

$$k \cdot I_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}.$$

En déduire I_2 et I_3 .

- d. Démontrer que $I_k \leq \frac{1}{k+1}$ et en déduire la limite de la suite I_k quand k tend vers $+\infty$.
3. Soit u_0 un nombre réel tel que $0 < u_0 < 1$; on définit par récurrence une suite infinie $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$\text{pour } k > 0 \text{ fixé } u_1 = f_k(u_0), \quad u_n = f_k(u_{n-1}) \text{ pour } n \geq 1.$$

- a. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- b.** On suppose que $k \geq 2$.
Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n < \frac{u_{n-1}}{\sqrt{2}}$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite (que l'on précisera) quand n tend vers $+\infty$.
- 4.** Pour chaque entier k strictement positif on définit une application g_k de $[0; 1]$ dans $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ par $g_k(x) = f_k(x)$.
- a.** Démontrer que pour chaque entier $k \geq 1$, la fonction g_k admet une fonction réciproque g_k^{-1} .
- b.** Construire sur la figure précédente les courbes représentatives des fonctions g_k^{-1} pour $k = 1, 2, 3$.
- c.** Donner l'expression des fonctions g_1^{-1} et g_2^{-1} .