

∞ Baccalauréat C Paris¹ septembre 1977 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

1. l'équation

$$3x - 5y = 6$$

2. le système

$$\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y = x^2 \pmod{5}. \end{cases}$$

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit \mathbb{R}_+^* l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

On considère l'application F de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} définie par

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

On n'essaiera pas de « calculer l'intégrale ».

1. Étudier le sens de variation de F .
2. Étudier le signe de la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = F(x) - \text{Log } x,$$

où Log désigne la fonction logarithme népérien.

En déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

3. Soit (C) la courbe représentative de F dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé. On admet, pour tout réel t , l'inégalité

$$e^t > te^{\frac{t}{2}}.$$

Que peut-on en déduire sur la branche infinie de (C) lorsque x tend vers $+\infty$?

Tracer dans P la courbe (C) .

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

Soit \mathcal{A} l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où (a, b, c) décrit \mathbb{R}^3 . On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On donne $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ élément de \mathcal{A} .

Démontrer que, pour tout entier $n, n > 1$, il existe un nombre réel γ_n tel que

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \gamma_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

Démontrer que, si $a \neq b$,

$$\gamma_n = c \frac{a^n - b^n}{a - b}.$$

Dans le cas où $a = b$, exprimer γ_n en fonction de a, c, n .

2. On désigne par \mathcal{A}' l'ensemble des éléments $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ de \mathcal{A} pour lesquels il existe un entier $n \geq 1$ tel que $A^n = I$.
- Montrer que $|a| = |b| = 1$.
 - Montrer que A est de l'une des formes suivantes :

$$A = I, \quad A = -I, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Conclure que tout élément A de \mathcal{A}' vérifie $A^2 = I$.

Partie B

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , de dimension deux, muni d'une base (\vec{i}, \vec{j}) . L'application identique de E est notée e . Etant donné une application linéaire g de E dans E , on note, pour tout entier $k > 2$, g^k la composée de k applications égales à g ; g^1 désigne, suivant l'usage, g .

Exemple préliminaire : on considère l'application linéaire u de E dans E définie par

$$u(\vec{i}) = \vec{j} \quad \text{et} \quad u(\vec{j}) = -\vec{i} + \vec{j}.$$

- Montrer que l'équation $u^m = e$, dont l'inconnue est l'entier m strictement positif, admet au moins une solution. Résoudre l'équation.
- Montrer que, pour tout vecteur non nul \vec{v} de E , \vec{v} et $u(\vec{v})$ forment une partie libre

Objet du problème : On s'intéresse aux applications linéaires f de E dans E , distinctes de e , pour lesquelles il existe un entier strictement positif q tel que $f^q = e$. Pour chaque application f , on désigne par p le plus petit entier strictement positif tel que $f^p = e$. On distingue, pour une telle application, les deux cas suivants :

1. *Cas A :* il existe au moins un vecteur non nul \vec{w} tel que $f(\vec{w})$ soit colinéaire à \vec{w} .

Ce vecteur \vec{w} étant fixé, on choisit une base de E dont le premier vecteur est \vec{w} .

a. Montrer que la matrice de f relativement à cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

b. Que vaut p ? Quelles sont toutes les applications f de ce cas A?

2. *Cas B :* Pour tout vecteur \vec{v} non nul, \vec{v} et $f(\vec{v})$ forment une partie libre.

a. Montrer que $p = 2$ est impossible, en considérant l'image par f du vecteur $f(\vec{v}) - \vec{v}$ ou du vecteur $f(\vec{v}) + \vec{v}$.

b. Soit \vec{v}_0 un vecteur non nul de E . On pose, pour tout entier $k \geq 1$, $\vec{v}_k = f^k(\vec{v}_0)$. Montrer, dans l'ordre que l'on préférera, que

- (\vec{v}_0, \vec{v}_1) est une base de E et que, dans cette base, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & b \end{pmatrix}$ où $c = +1$ ou $c = -1$;

(on ne cherchera ni à déterminer le signe de c , ni à calculer b);

- $f(\vec{v}_{p-1}) = \vec{v}_0$, les vecteurs \vec{v}_k sont tous non nuls et la somme $\sum_{k=0}^{p-1} \vec{v}_k$ est nulle.

Partie C

On définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel E : il associe à deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} de E le réel noté $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

1. Étant donné une application linéaire g de E dans E et un entier r supérieur ou égal à deux, on pose :

$$\Phi_{g, x}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \sum_{k=1}^{r-1} g^k(\vec{y})(x).$$

Montrer que l'application $\Phi_{g, x}$ de E^2 dans \mathbb{R} est, elle aussi, un produit scalaire sur E .

2. On prend pour g une application f de la partie B et pour r l'entier p associé. On note (E, Φ_f) l'espace vectoriel euclidien obtenu en munissant E du produit scalaire $\Phi_{f, p}$ désigné par Φ_f .

Démontrer que

- f est une isométrie de (E, Φ_f) ,
- si p est strictement supérieur à deux, f est une rotation de (E, Φ_f) .

c. On prend ici $f = u$, où u est l'application considérée au début de B.

Calculer $\Phi_u(\vec{i}, \vec{i})$, $\Phi_u(\vec{j}, \vec{j})$ et $\Phi_u(\vec{i}, \vec{j})$.

Interpréter la valeur du rapport $\frac{\Phi_u(\vec{i}, \vec{j})}{\Phi_u(\vec{i}, \vec{i})}$. Vérifier cette interprétation en tenant compte de la valeur de l'entier p associé à u .