Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat Paris juin 1965 ∽
Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

Composition refaite

EXERCICE 1

1. Calculer le module et l'argument du nombre complexe

$$z = \frac{1}{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

suivant la valeur de l'angle α.
Placer, relativement à un repère orthonormé, les images, A et B, des nombres

$$z_0 = \frac{1}{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{1}{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{3}}$$

2. Soit M l'image du nombre complexe

$$Z = \frac{1 + \mathrm{i}x}{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}x\left(1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{3}\right)},$$

où x est un nombre réel quelconque.
Calculer le module r et l'argument θ de $\dfrac{Z - z_0}{Z - z_1}$.
Quelles sont les affixes complexes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$?
Du calcul de r et θ déduire l'ensemble des points M obtenus lorsque x varie de 0 à $+\infty$.

EXERCICE 2

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé $(\mathrm{O}x,\ \mathrm{O}y)$.

1. Soit a, b, c, d quatre nombres réels. On considère les deux systèmes de relations

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{lcl} a^2 + c^2 & = & 1, \\ b^2 + d^2 & = & 1, \\ ab + cd & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (2) \quad \left\{\begin{array}{lcl} |ad - bc| & = & 1 \\ a^2 & = & d^2 \\ b^2 & = & c^2 \end{array}\right.$$

Montrer, soit algébriquement, soit trigonométriquement (en remarquant que, si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe au moins un angle θ tel que $\alpha = \cos\theta$ et $\beta = \sin\theta$), que (1) implique (2).
La réciproque est-elle vraie ?

2. On considère la transformation ponctuelle $\mathscr{R}$ qui, à chaque point $m(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M''(X'\ ;\ Y')$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} X' & = & \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y \\ Y' & = & \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y. \end{array}\right.$$

   a. Quels sont les points doubles de $\mathscr{R}$?

b. Montrer que Om = OM' et que, si P' est l'image de p, on a toujours $pm = P'M'$.

c. Calculer, à $2k\pi$ près, l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}m},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M}\right)$ et reconnaître la nature de $\mathscr{R}$.

3. Dans les mêmes conditions, on considère la transformation $\mathscr{S}$ qui à chaque point $m(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $M"(X''\ ;\ Y'')$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} X'' &=& \dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y \\ Y'' &=& \dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}y. \end{array}\right.$$

a. Quels sont ses points doubles ? Montrer que $\mathscr{S}$ est une symétrie axiale.

4. Plus généralement, tout système de relations

$$\left\{\begin{array}{lcl} X &=& ax+by, \\ Y &=& cx+dy, \end{array}\right.$$

où a, b, c, d sont des nombres réels vérifiant l'inégalité $ad - bc \neq 0$, définit une transformation ponctuelle $\mathscr{T}$ par laquelle tout point $m(x\ ;\ y)$ a pour image $M(X\ ;\ Y)$.

a. Rechercher un ensemble de conditions nécessaire et suffisant entre les nombres a, b, c, d pour que la transformation correspondante soit une isométrie, c'est-à-dire conserve les distances (M et P étant les images de m et p, on a $mp = MP$ quels que soient m et p).

À quelle condition cette isométrie est-elle un déplacement ?

À quelle condition est-elle une symétrie axiale ?

b. $\mathscr{T}$ peut-elle être une similitude ?

5. On se propose maintenant d'étudier la transformation $\mathscr{T}'$ particulière définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} X &=& x \\ Y &=& 3x+2y. \end{array}\right.$$

a. A-t-elle des points doubles ?

b. Quelle est la figure transformée, soit d'une droite parallèle à Ox, soit d'une droite parallèle à Oy ?

c. Donner un procédé graphique simple de construction de l'image M d'un point quelconque m et reconnaître la transformation $\mathscr{T}'$.

N. B. - Les questions 1, 2 et 3 du problème sont indépendantes. Mathématiques.