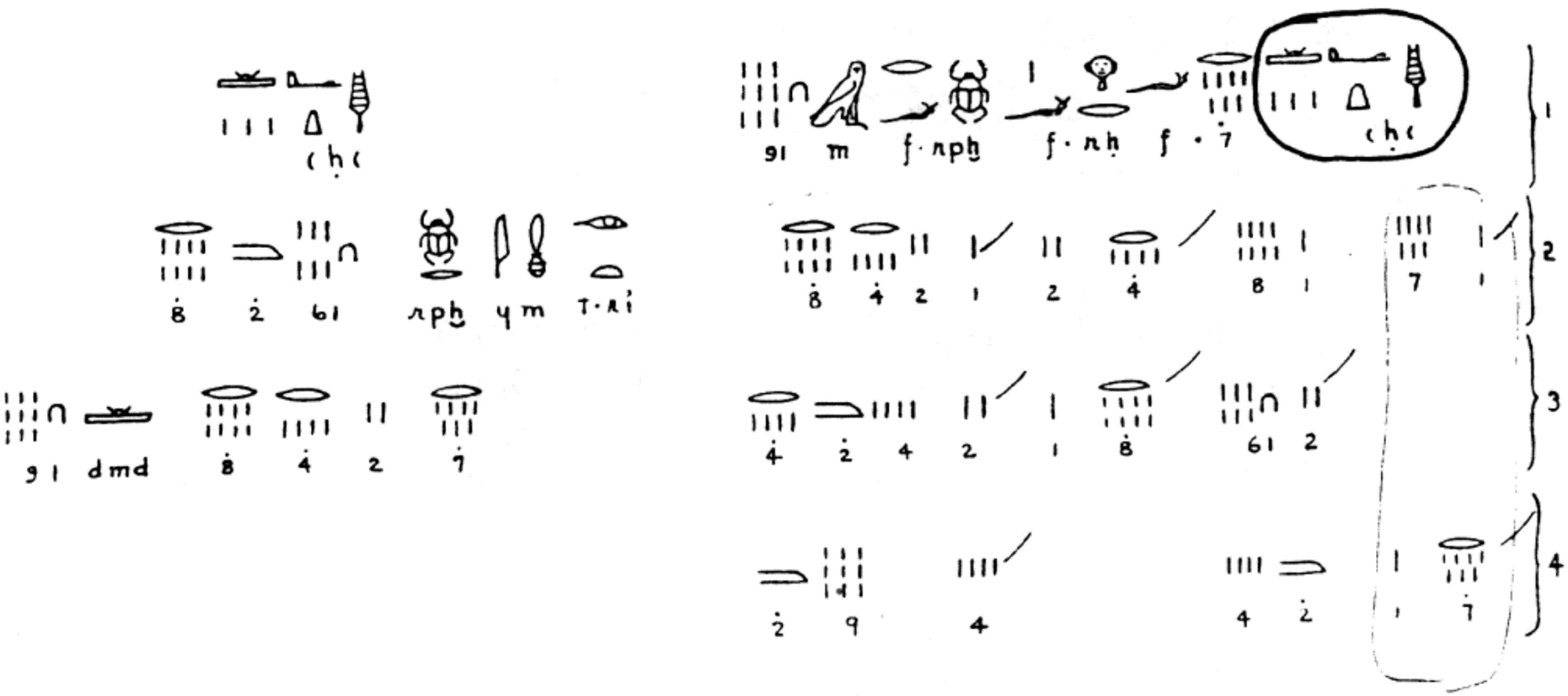
Petite histoire des équations polynomiales

Introduction aux nombres complexes

Les équations de degré 1

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

Papyrus de Rhind (environ – 1600)



ex

Les équations de degré 1

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

Papyrus de Rhind (environ – 1600)

Le scribe, donc, ne fait pas cette division et procède d'une autre manière, que voici (voir Fig. 7) :

a)

1	7
$\frac{1}{7}$	1

b)

1	8
$\backslash$ 2	16
$\frac{1}{2}$	4
$\backslash$ $\frac{1}{4}$	2
$\backslash$ $\frac{1}{8}$	1

c)

$\backslash$ 1	$2\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$
$\backslash$ 2	$4\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$
$\backslash$ 4	$9\ \frac{1}{2}$

$$7 \times \left(1 + \frac{1}{7}\right) = 8$$

$$\left(1 + \frac{1}{7}\right) = \frac{8}{7}$$

Les équations de degré 1

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

Papyrus de Rhind (environ – 1600)

Le scribe, donc, ne fait pas cette division et procède d'une autre manière, que voici (voir Fig. 7) :

a)

1	7
$\frac{1}{7}$	1

b)

	1	8
\	2	16
	$\frac{1}{2}$	4
\	$\frac{1}{4}$	2
\	$\frac{1}{8}$	1

c)

\	1	$2\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$
\	2	$4\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$
\	4	$9\ \frac{1}{2}$

$$7 \times \left(1 + \frac{1}{7}\right) = 8$$

$$\left(1 + \frac{1}{7}\right) = \frac{8}{7}$$

$$8 \times \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 19$$

$$\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{19}{8}$$

Les équations de degré 1

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

Papyrus de Rhind (environ – 1600)

Le scribe, donc, ne fait pas cette division et procède d'une autre manière, que voici (voir Fig. 7) :

a)

1	7
$\frac{1}{7}$	1

b)

1	8
\ 2	16
$\frac{1}{2}$	4
\ $\frac{1}{4}$	2
\ $\frac{1}{8}$	1

c)

\ 1	$2\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$
\ 2	$4\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$
\ 4	$9\ \frac{1}{2}$

$$7 \times \left(1 + \frac{1}{7}\right) = 8$$

$$\left(1 + \frac{1}{7}\right) = \frac{8}{7}$$

$$8 \times \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 19$$

$$\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{19}{8}$$

$$7 \times \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

Les équations de degré 2

Babylone. Tablette BM 13901 – environ XVIII^{e} s. av J.C.

Problèmes 1, 2 et 3. Transcrits et traduits par F. Thureau-Dangin, Leiden, E.J. Brill, 1938, réédition IREM de Dijon, 1995

I

eqlam[am] ù mi-it-ḫar-ti ak-m[ur-m]a 45-e 1 wa-ṣi-tam
la-ša-ka-an ba-ma-at 1 te-ḫe-pe [30] ù 30 tu-uš-ta-kal
15 a-na 45 tu-ṣa-ab-ma 1-e 1 imtaḫar 30 ša tu-uš-ta-ki-lu
lib-ba 1 ta-na-sà-aḫ-ma 30 mi-it-ḫar-tum

„J'ai additionné la surface et le côté de mon carré: 45′.
Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : (30′). Tu croiseras [30′] et 30′ : 15′. Tu ajouteras 15′ à 45′ : 1. C'est le carré de 1. Tu soustrairas 30′, que tu as croisé, de 1 : 30′, le côté du carré."

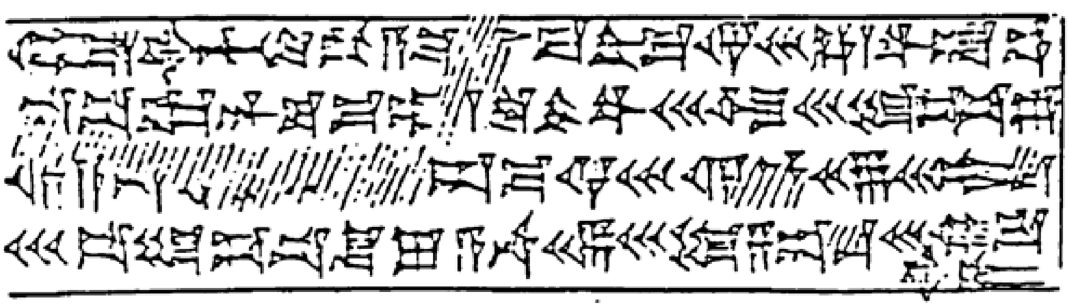


Illustration du problème 2 (Dhombres J. et al., Mathématiques au fil des âges, Gauthier-Villars, 1987, p. 89

Les équations de degré 2

Babylone. Tablette BM 13901 – environ XVIIIe s. av J.C.

Problèmes 1, 2 et 3. Transcrits et traduits par F. Thureau-Dangin, Leiden, E.J. Brill, 1938, réédition IREM de Dijon, 1995

2

mi-il-ḫar-ti lib-bi eqlim [a]s-sú-uḫ-ma 14.30-e 1 wa-ṣi-tam
ta-ša-ka-an ba-ma-at 1 te-ḫe-pe 30 ù 30 tu-uš-ta-kal
15 a-na 1[4.3]0 t[u-ṣa-]ab-ma 14.30.15-e 29.30 imtaḫar
30 ša tu-uš-ta-ki-lu a-na 29.30 tu-ṣa-ab-ma 30 mi-it-ḫar-tum

„J'ai soustrait de la surface le côté de mon carré: 14‘30.
Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : (30′). Tu croiseras 30′ et 30′ : 15′. Tu [ajou]teras à 14‘30 : 14‘30°15′. C'est le carré de 29°30′. Tu ajouteras 30′, que tu as croisé, à 29°30′ : 30, le côté du carré."

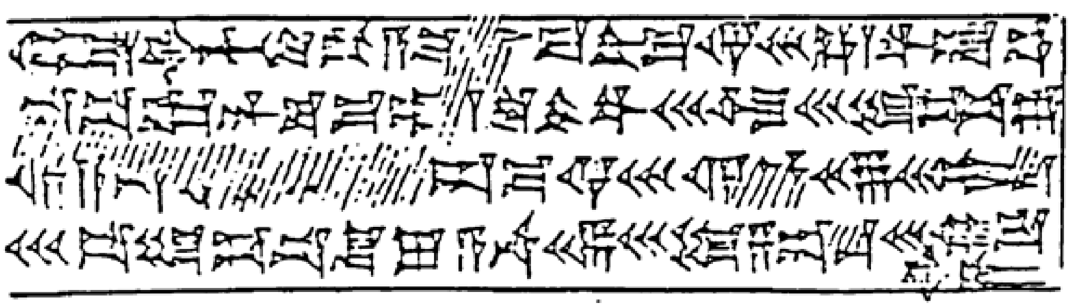


Illustration du problème 2 (Dhombres J. et al., Mathématiques au fil des âges, Gauthier-Villars, 1987, p. 89

Les équations de degré 2

„J'ai soustrait de la surface le côté de mon carré: 14‘30.

Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : (30′). Tu croiseras 30′ et 30′ : 15′. Tu [ajou]teras à 14‘30 : 14‘30°15′. C'est le carré de 29°30′. Tu ajouteras 30′, que tu as croisé, à 29°30′ : 30, le côté du carré."

$$x^2 - x = 870$$

- On pose 1
- On fractionne 1 en deux : 1/2
- On multiplie 1/2 × 1/2 = 1/4
- On ajoute 870 + 1/4 = 870,25
- $\sqrt{}$870,25 = 29,5
- On ajoute 29,5 + 1/2 = 30

Illustration du problème 2 (Dhombres J. et al., Mathématiques au fil des âges, Gauthier-Villars, 1987, p. 89

Les équations de degré 2

„J'ai soustrait de la surface le côté de mon carré: 14‘30.

Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : (30′). Tu croiseras 30′ et 30′ : 15′. Tu [ajou]teras à 14‘30 : 14‘30°15′. C'est le carré de 29°30′. Tu ajouteras 30′, que tu as croisé, à 29°30′ : 30, le côté du carré."

$$x^2 - x = 870$$

- On pose 1
- On fractionne 1 en deux : 1/2
- On multiplie 1/2 × 1/2 = 1/4
- On ajoute 870 + 1/4 = 870,25
- √870,25 = 29,5
- On ajoute 29,5 + 1/2 = 30

$$x^2 - 1x = 870$$

$$x^2 - 2{\times}1/2\ x = 870$$

$$x^2 - 2{\times}1/2\ x + 1/4 = 870 + 1/4$$

$$(x - 1/2)^2 = 29{,}5^2$$

$$x - 1/2 = 29{,}5$$

$$x = 30$$

Illustration du problème 2 (Dhombres J. et al., Mathématiques au fil des âges, Gauthier-Villars, 1987, p. 89

Les équations de degré 2

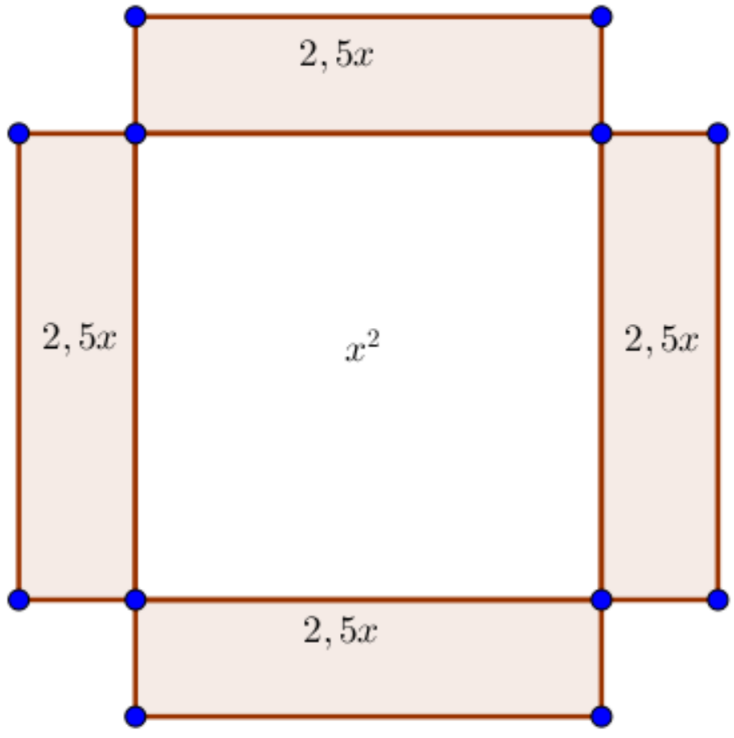
Al Khwarizmi (vers 780 – 850)

Quant à la justification de *un bien et dix racines égal trente-neuf dirhams*, sa figure est une surface carrée de côtés inconnus, et c’est le bien que tu veux connaître et dont tu veux connaître la racine.

Les équations de degré 2

Quant à la justification de *un bien et dix racines égal trente-neuf dirhams*, sa figure est une surface carrée de côtés inconnus, et c'est le bien que tu veux connaître et dont tu veux connaître la racine.

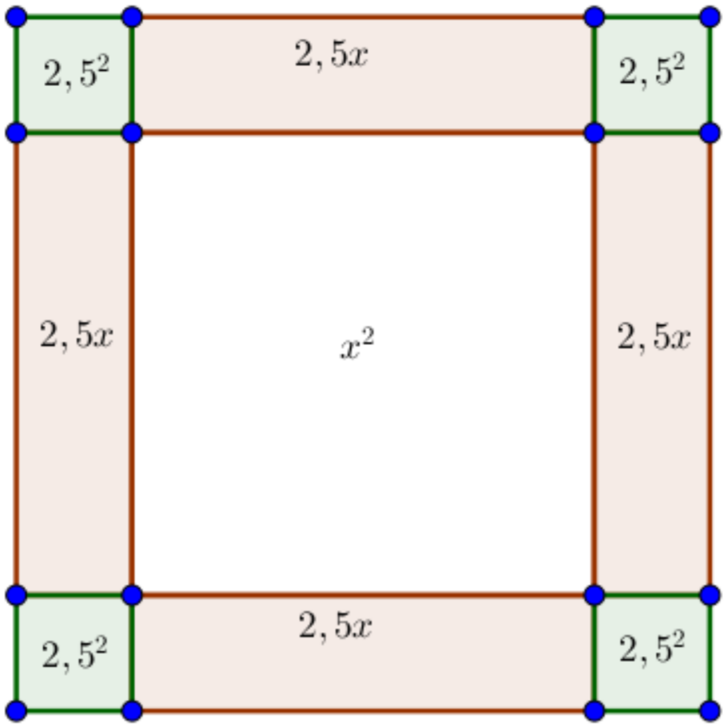
$$x^2 + 10x = 39$$



Les équations de degré 2

Quant à la justification de *un bien et dix racines égal trente-neuf dirhams*, sa figure est une surface carrée de côtés inconnus, et c'est le bien que tu veux connaître et dont tu veux connaître la racine.

$$\boldsymbol{x}^2 + 10\boldsymbol{x} = 39$$

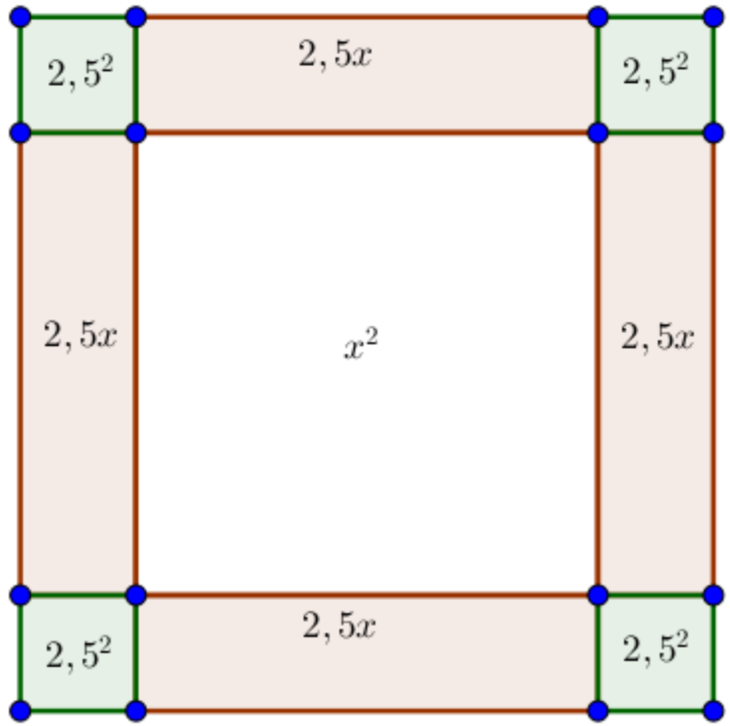


$$39 + 4 \times 2{,}5^2$$

Les équations de degré 2

Quant à la justification de *un bien et dix racines égal trente-neuf dirhams*, sa figure est une surface carrée de côtés inconnus, et c'est le bien que tu veux connaître et dont tu veux connaître la racine.

$$x^2 + 10x = 39$$



Aire totale = 64

Grand côté = 8

$x = 8 - 2 \times 2,5 = 3$

Les équations de degré 3 et 4

- **1535 :**

  Tartaglia résout des équations du type:

  $x^3 + px = q$ et

  $x^3 = px + q$

  en secret

- **1538 :**

Tartaglia livre son secret à Cardan

Les équations de degré 3 et 4

Retranscription du poème transmis à J.Cardan, qu'il reprends et démontrer dans son ouvrage *Ars Magna* (1545), pour déterminer la solution positive de l'équation $x^3 + px = q$ $(p>0;q>0)$.

Le tiers du nombre de la
chose au cube étant obtenu*
on y ajoute le carré de la moitié
du nombre de l'équation
et du tout on extrait la racine
que l'on met de côté.

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$$

***chose* : inconnue**

Les équations de degré 3 et 4

Le demi nombre que l'on
a élevé au carré tu ajoutes
ou tu enlèves à l'autre ;
*tu as le binôme** avec*
*son apotome ****

$$\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$$

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$$

En extrayant la racine cubique
de l'apotome et celle de son
binôme, le résidu de leurs
différences est la valeur de la racine"

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

**** *binôme* : somme de deux termes dont une racine**
*** ***l'apotome* : différence des deux termes d'un binôme**

Feuille de route

Etude 2
questions 1) 2)

Pour les polynômes de de degré 3, on dispose des formules dites « de Cardan »
Pour une équation de la forme $x^3 = px + q \ (p > 0; q > 0)$ *les formules de Cardan donne comme solution positive le nombre :*

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

Considérons l'équation $x^3 = 15\,x + 4$
1) A l'aide d'un tableur ou de Geogebra, déterminer une solution positive de cette équation.
2) Appliquer la formule de Cardan pour déterminer cette solution

Les équations de degré 3 et 4

- **1545 :**

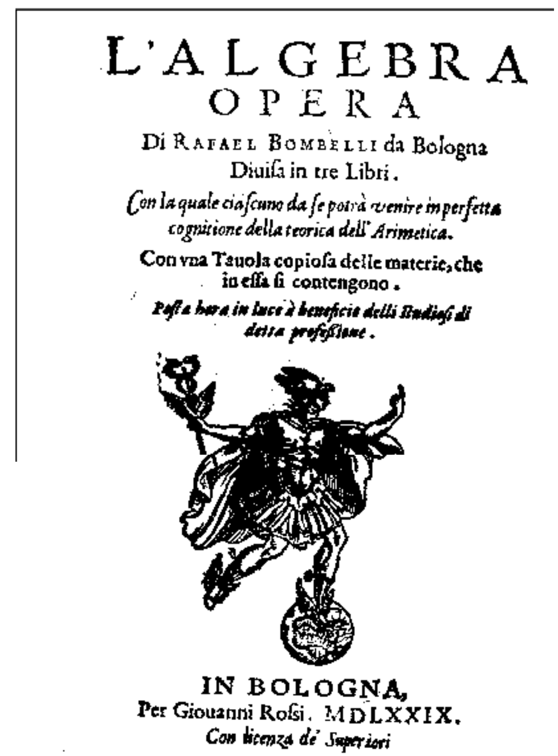
  Cardan publie la solution et soulève une difficulté à son propos mais ne va pas plus loin.

- **1550 :**

  Bombelli redécouvre la même difficulté que Cardan . Il la surmonte en introduisant un calcul sur des « *imaginaires* »

- **1572 :**

  Bombelli publie, dans *L' Algebra*, ses calculs de 1550



L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Bombelli

- Exemple de difficulté :

  Résolution de $x^3 = 15\,x + 4$

- 4 est solution de cette équation.
- Les formules de Cardan donnent comme solution :

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$$

Les deux devrait être égales ! Problème !

Bombelli

- **J'ai trouvé une autre sorte de R.c très différente des autres,** qui paraît au chapitre sur le cube égal à une quantité et à un nombre quand le cube du tiers de la quantité est plus grand que le carré de la moitié du nombre comme il a été démontré dans ce chapitre. Cette sorte de R.q a pour son algorithme, des opérations différentes des autres et a un nom différent; car lorsque le cube du tiers de la quantité est plus grand que le carré de la moitié du nombre, l'excès ne peut être appelé ni plus ni moins, **mais il peut être appelé plus de moins** quand il a été ajouté

Bombelli

Ancora si può procedere nella equatione di questo Capitolo in un'altro modo come se si hauesse ad agguagliare $\overset{3}{1}$ a $\overset{1}{15}$ p. $\overset{0}{4}$: pigliasi il terzo de le Cose, che è 5. cubasi fa 125. et questo si caua del quadrato della metà del numero che è 4, restarà 0 m. 121, che di questo pigliata la Radice, dirà R⌊0 m. 121⌋, che aggiunta con la metà del numero, farà 2. p. R⌊0 m. 121⌋, che pigliatone il creator cubico, et aggiunto col suo residuo farà R³⌊2 p. R⌊0 m. 121⌋⌋ p. R³⌊2 m R⌊0 m 121⌋⌋ et tanto uale la cosa: Et benche questo modo si possa più tosto chiamar sofistico, che altrimenti come fu detto innanti nel Capitolo di Censi, et Numero eguali a Cose, che pure nell'operatione serue senza difficoltà niuna, et assai uolte si troua la ualuta de la Cosa per numero, come questo, et hà creatore; che il Creatore di

$\overset{3}{1}$ Eguale a $\overset{1}{15}$ p. $\overset{0}{4}$

5	2
5	2
25	4
5	
125	125

R⌊0 m 121⌋

2 2

Somma R⌊0 m 121⌋ Caua R⌊0 m 121⌋

R³⌊2 p. R⌊0 m. 121⌋⌋ p R³⌊2 m R⌊0 m. 121⌋⌋

Creatore 2 p. R⌊0 m. 1⌋ p. 2 m. R⌊0 m. 1⌋

2 m. R⌊0 m. 1⌋

Somma 4 : et tanto uale la Cosa.

Bombelli

Règles de calculs usuelles et en plus nouvelles règles de calcul sur le «plus de moins»

- *Più di meno via più di meno fa meno* $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$
- *Più di meno via meno di meno fa più*
- *Meno di meno via più di meno fa più*
- *Meno di meno via meno di meno fa meno*

Bombelli

En acceptant ces nouvelles règles, Bombelli calcule

- *Più di meno via più di meno fa meno* $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2\sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \sqrt{-1}^2 + \sqrt{-1}^3$$

Bombelli

En acceptant ces nouvelles règles, Bombelli calcule

- *Più di meno via più di meno fa meno* $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2\sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \sqrt{-1}^2 + \sqrt{-1}^3$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2\sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \sqrt{-\mathbf{1}}\sqrt{-\mathbf{1}} + \sqrt{-\mathbf{1}}\sqrt{-\mathbf{1}}\sqrt{-1}$$

Bombelli

En acceptant ces nouvelles règles, Bombelli calcule

- *Più di meno via più di meno fa meno* $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2\sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \sqrt{-1}^2 + \sqrt{-1}^3$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2\sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \sqrt{-\mathbf{1}}\sqrt{-\mathbf{1}} + \sqrt{-\mathbf{1}}\sqrt{-\mathbf{1}}\sqrt{-1}$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} + 6 \times (-\mathbf{1}) + (-\mathbf{1})\sqrt{-1}$$

Bombelli

En acceptant ces nouvelles règles, Bombelli calcule

- *Più di meno via più di meno fa meno* $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2\sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \sqrt{-1}^2 + \sqrt{-1}^3$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2\sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \boldsymbol{\sqrt{-1}\sqrt{-1}} + \boldsymbol{\sqrt{-1}\sqrt{-1}}\sqrt{-1}$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} + 6 \times (\boldsymbol{-1}) + (\boldsymbol{-1})\sqrt{-1}$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Bombelli

En acceptant ces nouvelles règles, Bombelli calcule

- *Più di meno via più di meno fa meno* $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2\sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \sqrt{-1}^2 + \sqrt{-1}^3$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2\sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \sqrt{-\mathbf{1}}\sqrt{-\mathbf{1}} + \sqrt{-\mathbf{1}}\sqrt{-\mathbf{1}}\sqrt{-1}$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} + 6 \times (-\mathbf{1}) + (-\mathbf{1})\sqrt{-1}$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

Bombelli

- Ce calcul qui permet d'obtenir :

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$$

Bombelli

- Ce calcul qui permet d'obtenir :

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)-\left(-2+\sqrt{-1}\right)$$

Bombelli

- Ce calcul qui permet d'obtenir :

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right) - \left(-2+\sqrt{-1}\right)$$

$$2+\sqrt{-1}+2\ -\sqrt{-1}$$

Bombelli

- Ce calcul qui permet d'obtenir :

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right) - \left(-2+\sqrt{-1}\right)$$

$$2+\cancel{\sqrt{-1}}+2-\cancel{\sqrt{-1}}$$

$$4$$

- On retrouve bien ainsi la solution évidente !

Le problème de la notation

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

- $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$

Le problème de la notation

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

- $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$

- Mais par définition $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

Le problème de la notation

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$
- Mais par définition $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$
- **Alors $-1 = 1$??????????????**

Euler : la notation i

- **1777 :**
  Euler introduit en 1777 le symbole i pour désigner $\sqrt{-1}$

- $i \times i = -1$

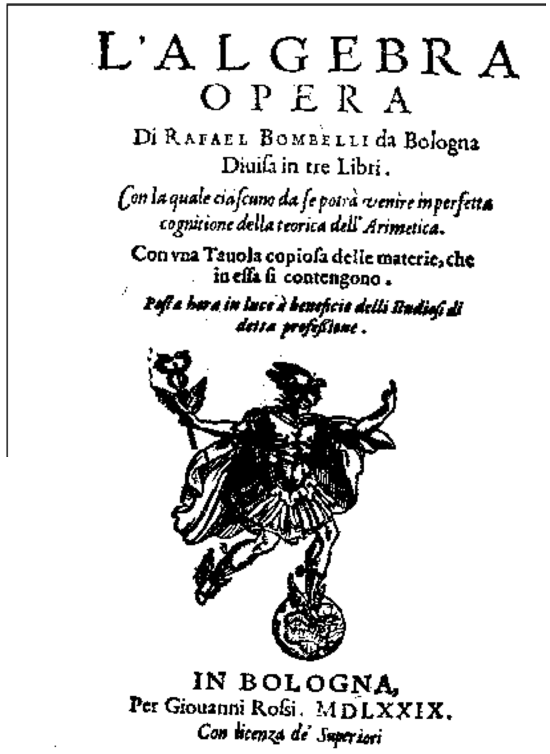
Quoniam mihi quidem alia adhuc via non patet istud praestandi, nisi per imaginaria procedendo, formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posterum designabo, ita ut sit $ii = -1$, ideoque $\frac{1}{i} = -i$.

Les équations de degré 3 et 4

- **1572 :**

  Bombelli publie, dans *L' Algebra*, ses calculs de 1550

  On sait donc résoudre avec des formules avec des radicaux les équations de degré 3



Et les mathématiciens ont « inventés » pour l'occasion de nouveaux nombres, appelés « nombres imaginaires » puis « nombres complexes » de la forme $a + ib$ où i vérifie $i^2 = -1$

Le théorème fondamental de l'algèbre

Descartes, *La géométrie,* 1637

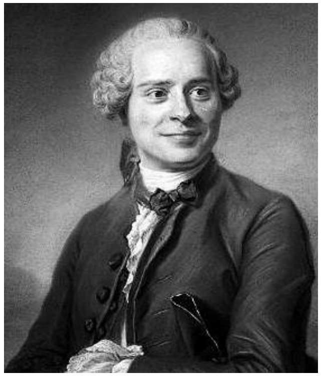
Que les racines, tant vrayes que fauſſes peuuent eſtre reelles ou imaginaires.

Au reſte tant les vrayes racines que les fauſſes ne ſont pas touſiours reelles; mais quelquefois ſeulement imaginaires; c'eſt a dire qu'on peut bien touſiours en imaginer autant que iay dit en chaſque Equation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui correſponde a celles qu'on imagine. comme encore qu'on en puiſſe imaginer trois en celle cy, $x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0$, il n'y en a toutefois qu'vne reelle, qui eſt 2, & pour les deux autres, quoy qu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie en la façon que ie viens d'expliquer, on ne ſçauroit les rendre autres qu'imaginaires.

Le théorème fondamental de l'algèbre

- Dans l'ensemble des nombres complexes, un polynôme de degré n admet exactement n racines (en comptant leur multiplicité)

Théorème de D'Alembert - Gauss



D'Alembert (1717-1783)

Gauss (1777-1855)

Les équations de degré 5 et plus

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Évariste Galois (1811 -1832)

Il n’existe pas de formule générale pour résoudre par radicaux l’équation de degré 5

La suite dans le cours …

MERCI DE VOTRE ATTENTION

Multiplication égyptienne

Si on veut poser la multiplication de 5 par 11

✓	1	5
✓	2	10
	4	20
✓	8	40

ou

✓	1	11
	2	22
✓	4	44

$5 \times 11 = 5 + 10 + 40 = 55$

$11 \times 5 = 11 + 44 = 55$