

∞ Baccalauréat C Poitiers juin 1971 ∞

EXERCICE 1

On considère le nombre complexe

$$Z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}.$$

1. Calculer z^5 .
2. On pose $u = z + z^4$ et $v = z^2 + z^3$.
Calculer $u + v$ et uv et en déduire u et v .
3. Exprimer $\cos \frac{2\pi}{5}$ en fonction de u ; en déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

EXERCICE 2

Un nombre s'écrit $\overline{x32y}$ dans la base 5.

Déterminer x et y pour que ce nombre soit divisible par 3 et par 4.

PROBLÈME

Soit (Π) l'ensemble des points du plan rapportés à un repère d'axes Ox et Oy . Dans (Π) , on définit une loi de composition interne qui, au couple (m, m') de points de (Π) , associe le point $M = m \star m'$ de (Π) défini comme suit :

si $(x; y)$ sont les coordonnées de m , si $(x'; y')$ sont celles de m' , alors les coordonnées $(X; Y)$ de M sont définies par les égalités

$$X = x + x' \quad \text{et} \quad Y = y + y' + 2xx'.$$

1.
 - a. Démontrer que (Π) est un groupe commutatif pour la loi \star .
 - b. Soit (C) la courbe d'équation $y = f(x)$, g la fonction définie par $g(x) = f(x) - x^2$.
Si m et m' sont choisis sur (C) , démontrer que M est sur (C) si, et seulement si, $g(x) + g(x') = g(x + x')$.
2. À tout point $m(x; y)$ on fait correspondre le point $m_1(x_1; y_1)$, avec

$$x_1 = -x \quad \text{et} \quad y_1 = -y + 2x^2.$$

- a. Montrer que l'application, T , de (Π) dans (Π) ainsi définie est bijective et involutive.
- b. Quelles sont l'équation et la nature de l'image par T d'une courbe (Γ) d'équation $t = ax^2 + bx + c$?
Préciser l'image de l'axe Ox .
Quelles sont les courbes (Γ) globalement invariantes? Démontrer que la courbe (C) est globalement invariante si, et seulement si, la fonction g est impaire.

3. Dans toute la suite du problème, m et m' sont pris sur la courbe (Γ_0) d'équation $y = x^2 + bx$.

a. Montrer que la loi \star munit (Γ_0) d'une structure de groupe abélien. On notera m_1 le symétrique de m pour la loi \star .

b. Lorsque m est différent de m' , montrer que $\overrightarrow{mm'}$ et \overrightarrow{OM} ont même direction. Montrer que $\overrightarrow{mm_1}$ a une direction fixe.

Par quelle transformation connue peut-on déduire m_1 de m ?

A et B sont deux points de (Γ_0) , variables, distincts, différents de O. La parallèle à OA passant par B recoupe (Γ_0) en B' et la parallèle à OB passant par A recoupe (Γ_0) en A' , les points A' et B' étant supposés distincts de A et de B.

Déterminer $A \star B \star A' \star B'$; démontrer que $A'B'$ garde une direction fixe et que le milieu du segment $[A'B']$ reste sur une droite fixe.