

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Poitiers juin 1976 ∞

**EXERCICE 1**

L'ensemble référentiel est l'ensemble  $\mathbb{N}^*$  des entiers naturels non nuls;  $x$  est un élément de  $\mathbb{N}^*$ , différent de 1;  $p$  et  $q$  sont des éléments de  $\mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que si  $d$  est un diviseur de  $p$ , alors  $x^d - 1$  est un diviseur de  $x^p - 1$ .
2. Montrer que si  $d$  est le P.G.C.D. de  $p$  et de  $q$ , alors il existe  $m$  et  $n$  tels que

$$mp - nq = d.$$

En déduire que si  $d$  est le P.G.C.D. de  $p$  et de  $q$ , on peut trouver  $m$  et  $n$  vérifiant :

$$(x^{mp} - 1) - (x^{nq} - 1)x^d = (x^d - 1).$$

3. De l'égalité précédente, déduire que  $(x^d - 1)$  est le P.G.C.D. de  $x^{mp} - 1$  et de  $x^{nq} - 1$ .

**EXERCICE 2**

Le plan affine euclidien  $P$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Au point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  on fait correspondre le complexe  $z = x + iy$ , appelé affixe de  $M$ , et  $\bar{z} = x - iy$  est l'imaginaire conjugué de  $z$ .

1. Soit  $f$  l'application de  $P$  vers  $P$  qui au point  $M$  d'affixe  $z$  fait correspondre le point  $M'$  dont l'affixe  $z'$  est :

$$z' = (1 - i\sqrt{3})z + 3 + 3i\sqrt{3}.$$

Quelle est l'image  $f(\omega)$  du point  $\omega$  d'affixe  $1 + i\sqrt{3}$ ?

Montrer que  $f$  est une similitude inverse dont on précisera les éléments remarquables.

2. Soit  $g$  la symétrie affine orthogonale par rapport à la droite affine d'équation  $y = x\sqrt{3}$ . Calculer en fonction de  $x$  et  $y$ , coordonnées d'un point  $M$ , les coordonnées  $(x'; y')$  de  $M' = g(M)$ .
3. Déterminer  $g \circ f$  et donner ses éléments remarquables.

**PROBLÈME**

**Partie A**

Pour tout couple de réels  $(a_1; b_1)$ , on considère la fonction  $\varphi_1$  définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}_+$  des réels positifs de la façon suivante :

$$\begin{cases} \varphi_1(0) &= 0 \\ \varphi_1(x) &= x(a_1 + b_1 \text{Log } x), \quad \forall x > 0. \end{cases}$$

1. On suppose dans cette question  $a_1 = -b_1 = 1$ .
- a. Montrer que la fonction  $\varphi_1$  correspondante est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .  
Est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ ? Déterminer la fonction dérivée  $\varphi_1'$  et la limite de cette fonction quand  $x$  tend vers 0 par valeurs positives.
- b. Étudier les variations de  $\varphi_1$ . Construire sa courbe représentative ( $C_1$ ) dans un plan rapporté à un repère orthonormé; on précisera la nature de la branche infinie, la tangente à l'origine du repère et les points d'ordonnée nulle.
- c. Montrer que la fonction  $\varphi_2$  :

$$x \mapsto \varphi_2(x) = \int_0^x \varphi_1(t) dt$$

est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

Calculer  $\varphi_2(x)$ . (On trouvera, pour  $x$  non nul,  $\varphi_2(x) = \frac{x^2}{4}(3 - 2\text{Log } x)$ ).

Construire la courbe représentative ( $C_2$ ) de  $\varphi_2$  dans le même plan que ( $C_1$ ) en précisant la nature de la branche infinie, la tangente à l'origine du repère, les points d'ordonnée nulle.

2. On suppose maintenant  $a_1$  et  $b_1$  réels quelconques.
- a. Étudier brièvement la continuité et la dérivabilité de la fonction  $\varphi_1$  associée.

$$\begin{cases} \varphi_1(0) &= 0 \\ \varphi_1(x) &= x(a_1 + b_1 \text{Log } x), \quad \forall x > 0. \end{cases}$$

- b. Montrer que l'on peut définir sur l'ensemble des entiers naturels non nuls une suite de fonctions  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 0, \quad \forall x > 0, \quad \varphi_1(x) = x(a_1 + b_1 \text{Log } x) \\ \forall n > 1, \quad \forall x \geq 0, \quad \varphi_n(x) &= \int_0^x \varphi_{n-1}(t) dt. \end{aligned}$$

Vérifier qu'il existe deux suites  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telles que :

$$\forall x > 0, \quad \varphi_n(x) = x^n (a_n + b_n \text{Log } x).$$

Former des relations de récurrence concernant les couples  $(a_n; b_n)$  et  $(a_{n+1}; b_{n+1})$ .

Étudier la suite  $b$ .

On pose, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $t_n = n!a_n$ .

Former une relation de récurrence satisfaite par  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

Montrer qu'il existe deux réels positifs  $A$  et  $B$  tels que :

$$\forall n \geq 1, \quad |t_n| = A + B \text{Log } n$$

(On pourra montrer que, pour tout entier naturel  $n$  strictement supérieur à 1, on a  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \text{Log } n$ ).

Étudier alors la convergence de la suite  $a$ .

### Partie B

À tout couple  $(a ; b)$  de réels, à tout entier naturel non nul  $p$ , on associe l'application  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi(x) &= x^p (a + b \text{Log } x), \quad \forall x > 0. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel non nul  $p$ , on note  $E_p$  l'ensemble décrit par  $\varphi$  lorsque  $(a ; b)$  décrit  $\mathbb{R}^2$  ?

1. Montrer que, si  $p$  est différent de 1,  $E_p$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ .  
Examiner le cas de  $p = 1$ .  
On supposera dans la suite du problème  $p \neq 1$ .
2. Montrer que les éléments de  $E_p$ , notés  $u$  et  $v$ , obtenus respectivement en donnant à  $(a ; b)$  les valeurs  $(1 ; 0)$  et  $(0 ; 1)$  forment une base de  $E_p$ .
3. Soit  $f$  l'application qui, à tout élément  $\varphi$  de  $E_p$  associe la fonction numérique  $f(\varphi)$ , notée  $g$ , définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $g(x) = x \cdot \varphi'(x)$ .  
Démontrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E_p$ . Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $(u ; v)$ . L'application  $f$  est-elle un automorphisme de  $E_p$  ?
4.  $k$  étant un réel donné, on appelle  $F_k$  l'ensemble des éléments  $\varphi$  de  $E_p$  tels que  $f(\varphi) = k \cdot \varphi$ .  
Déterminer  $F_k$  et discuter suivant les valeurs de  $k$ .
5. Démontrer qu'il existe deux constantes réelles  $\lambda$  et  $\mu$  telles que, pour tout élément  $\varphi$  de  $E_p$ ,

$$(f \circ f)(\varphi) + \lambda f(\varphi) + \mu \cdot \varphi$$

soit l'application nulle.