Baccalauréat C Poitiers juin 1979

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit A l'entier naturel qui s'écrit $\overline{1\ x\ 5\ y\ 4}$ dans le système de numération à base six.
Déterminer tous les couples $(x\ ;\ y)$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que :

1. A soit divisible par 33.
2. A soit divisible par 70.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (x-1) + (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Démontrer que f est dérivable dans $\mathbb{R}$ et étudier le sens de variations de sa fonction dérivée f'. En déduire le signe de f'.
2. Étudier la fonction f, et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé.
3. Démontrer que f possède une fonction réciproque g, que l'on ne cherchera pas à calculer et dont on précisera les propriétés (ensemble de définition, sens de variations, continuité, dérivabilité).

PROBLÈME **13 POINTS**

Soit P un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On désigne par B l'ensemble des éléments z du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes tels que $|z| < 1$.
Pour tout nombre complexe a, on appelle f_a la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f_a(z) = \frac{z+a}{az+1}$$

et on désigne par F_a la fonction de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = f_a(z)$.
On rappelle que, si M a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$, son affixe est $z = x + \mathrm{i}y$

Partie A

1. Préciser F_0 ; pour quelles valeurs de a, F_a est-elle une fonction constante ?
2. Quel est, suivant les valeurs de a, l'ensemble des points invariants par F_a ?
3. On suppose que a est un nombre réel de l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$.
   a. Montrer que la restriction h_a de f_a à B est une fonction de B dans B.
   Vérifier que son ensemble de définition est B.

b. On appelle H l'ensemble des applications h_a lorsque a décrit $]-1\ ;\ 1[$.

Montrer que H muni de la composition des applications, est un groupe commutatif en précisant l'élément neutre et le symétrique d'un élément h_a quelconque de H.

Le nombre complexe a étant de nouveau quelconque, montrer que la restriction g_a de ${}_a$ à $\mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles si et seulement si a est un réel.

Partie B

On suppose désormais que a est un nombre réel non nul appartenant à $]-1\ ;\ 1[$.
On pose $g_a(x) = \dfrac{x+a}{ax+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et on note C_a la courbe représentative de g_a dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier la fonction g_a, et tracer sur le même dessin les deux courbes $\mathrm{C}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathrm{C}_{-\frac{1}{2}}$.
2. Montrer que C_a et C_{-a} sont isométriques.
3. Trouver un réel b tel que : $\dfrac{x+a}{ax+1} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{b}{ax+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
4. Calculer l'aire géométrique de la partie du plan délimitée par C_a et C_{-a}.

Partie C

Soit φ l'application affine de P dans P qui au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x' &=& x+y-\dfrac{1}{a}\\ y' &=& -x+y-\dfrac{1}{a}\end{array}\right.$$

1. Préciser la nature de φ et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer une équation de l'image C'_a de C_a par φ. Quelle est la nature de C'_a ? Préciser ses éléments caractéristiques.

   Construire C'_a en prenant $a = \dfrac{1}{2}$.