∽ Baccalauréat C Poitiers juin 1981 ∾

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par f_n la fonction d'une variable réelle x telle que

$$f_n(x) = \text{Log}\,\frac{2+x}{2-x} - n\text{Log}\,(x+n)$$

(où Log désigne la fonction logarithme népérien).

1. Quel est l'ensemble de définition de f_n ? Étudier les limites et déterminer le tableau de variations de f_n. (on distinguera le cas $n = 2$). (On ne demande pas de construire la courbe).
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a

   $$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \frac{2+x}{2-x}$$

   pour tout x appartenant à $[0\,;\,2[$.

   (On pourra utiliser, à condition de la justifier, la propriété $f_n(x) \geqslant f_n(0)$ pour tout x appartenant à $[0\,;\,2[$.

EXERCICE 2

1. Un dé cubique A porte inscrits sur ses faces les nombres : -2, 1, 1, 1, $2n$, $-n$ (où n est un entier relatif).

   On suppose qu'à chaque lancer, les faces de A ont même probabilité d'apparition.

   a. On lance une fois le dé A et on note X le nombre obtenu. On définit ainsi une variable aléatoire.

   — Déterminer la loi de probabilité de X, en fonction du paramètre n.

   — Déterminer n pour que l'espérance mathématique de X soit nulle.

   Dans la suite, on donnera à n cette valeur.

   b. On lance A six fois de suite. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus quatre fois le nombre 1.
2. Soit B un autre dé cubique dont les faces portent les nombres $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ de telle sorte que les probabilités d'apparition respectives de ces nombres soient six termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

   a. Déterminer la probabilité d'apparition de chacune des faces de B.

   b. On lance simultanément les dés A et B. Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres obtenus soit égale à -2 ?

   Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres obtenus soit égale à -1 ?

PROBLÈME

Partie A

Soit u la fonction numérique d'une variable réelle qui à x associe

$$u(x) = \frac{x-3}{x-1}.$$

1. Soit h et h_1 les fonctions définies par

$$\begin{array}{rcl} h(x) & = & u(\operatorname{tg} x),\\ h_1(x) & = & \dfrac{\sin x - 3\cos x}{\sin x - \cos x} \end{array}$$

Montrer que h et h_1 coïncident sur une partie de $\mathbb{R}$ à préciser.

Étudier la fonction h, établir le tableau de ses variations et tracer sa courbe représentative.

2. a. Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I. À quelle condition supplémentaire doit satisfaire la fonction v pour que $u \circ v$ soit dérivable sur I? Préciser, lorsqu'il en est ainsi, la dérivée de $u \circ v$.

b. On note

$$\begin{array}{rcl} J(x) & = & \int_0^{\alpha} \dfrac{2}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t\\ K(x) & = & \int_{-1}^{x} \dfrac{\mathrm{e}^t}{\left(\mathrm{e}^t-1\right)^2}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

Calculer $J(x)$ et $K(x)$ en précisant les valeurs de x pour lesquelles ces intégrales sont définies.

Partie B

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Dans $\mathscr{P}$ on désigne respectivement par $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_3$ les courbes d'équations :

$$\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{x-3}{x-1}\\ xy & = & -2,\\ x^2-y^2 & = & -4. \end{array}$$

1. Précisez la nature de la conique $\mathscr{H}_3$ son excentricité, ses sommets, ses asymptotes, ses foyers et les directrices associées.

2. On désigne par r la rotation de centre O dont une mesure de l'angle est $\dfrac{\pi}{4}$, et par r^{-1} la transformation réciproque de r.

Étant donné un point M de coordonnées $(X~;~Y)$ quelles sont les coordonnées $(x~;~y)$ de $m = r^{-1}(M)$?

Quelle est l'équation de la transformée de $\mathscr{H}_3$ par r ?

3. Soit A, B et C les points de coordonnées A(1 ; 0), B(1 ; 1) et C(0 ; 1). On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des déplacements du plan $\mathscr{P}$ qui transforment la paire de droites {(BA), (BC)} en la paire {(OA), (OC)}.

a. Quelle est l'image de B par un élément de $\mathscr{F}$?

b. Montrer qu'il existe un déplacement unique f_1 d'endomorphisme associé φ_1, tel que $f_1(\text{B}) = \text{O}$ et $\varphi_1\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \overrightarrow{\imath}$, et que f_1 appartient à $\mathscr{F}$.

c. Montrer qu'il n'existe que trois autres déplacements f_2, f_3, f_4 qui appartiennent à $\mathscr{F}$ (en préciser les angles et les centres).

4. a. Soit $\mathscr{G}$ l'ensemble des déplacements du plan qui transforment {(BA), (BC)} en la paire des bissectrices des axes de coordonnées. Déduire des questions précédentes le nombre et la nature (sans autres précisions) des éléments de $\mathscr{G}$.

b. Soit m un point de coordonnées $(x\,;\ y)$. Préciser les coordonnées de son image M par $r^{-1} \circ f_1$. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $r^{-1} \circ f_1$.

c. Montrer que $\mathscr{H}_1$ est transformée en $\mathscr{H}_3$ par $r^{-1} \circ f_1$. Combien y a-t-il de déplacements transformant $\mathscr{H}_1$ en $\mathscr{H}_3$ (on admettra qu'un tel déplacement transforme toute asymptote de $\mathscr{H}_1$ en une asymptote de $\mathscr{H}_3$?

N.B. - Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre