Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1982 Poitiers

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** En supposant que $a = 9p+4q$ et $b = 2p+q$, démontrer que les entiers a et b d'une part; p et q d'autre part ont le même PGCD.
   b. Démontrer que les entiers $9p+4$ et $2p+1$ sont premiers entre eux. Quel est leur PPCM?
2. Déterminer le PGCD des entiers relatifs $9p+4$ et $2p-1$ en fonction des valeurs de p.

EXERCICE 2 **4 points**

Un plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$.
On se propose de déterminer l'ensemble E des points M de ce plan dont les affixes $z = x + \text{i}y$ (x et y réels) vérifient

$$|(1+\text{i})z - 2\text{i}| = 2.$$

Les deux questions proposent chacune une méthode et peuvent être résolues de façon indépendante l'une de l'autre.

1. Calculer le carré du module du complexe $(1+\text{i})z-2\text{i}$ en fonction des coordonnées $(x~;~y)$ de M. Déterminer E par une équation cartésienne. Reconnaître E puis le dessiner.
2. On note s la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$ et t la translation de vecteur $-2\overrightarrow{v}$.
   a. Un point M ayant pour affixe z, calculer l'affixe du point $s(M)$ puis l'affixe du point $t \circ s(M)$.
   b. Soit C l'ensemble des points M' d'affixe z' tels que $\left|z'\right| = 2$. Reconnaître C et le dessiner. Déterminer l'ensemble $t \circ s(\text{E})$; en déduire l'ensemble E.

PROBLÈME **12 points**

Un plan affine est rapporté à un repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormé; pour exécuter les figures on prendra pour unité de longueur 2 cm.
On donne le point A de coordonnées (1 ; 1).

Partie A

1. α étant un réel donné non nul, soit D la droite d'équation $x = \alpha$.
   Montrer qu'il existe une application affine f_α, et une seule, que l'on déterminera, qui satisfait aux deux conditions

$$f_\alpha(0) = \text{A} \quad \text{et} \quad \forall M \in \text{D}~\overrightarrow{Mf_\alpha(M)} = \overrightarrow{\imath}.$$

2. On considère l'application f qui, au point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ fait correspondre $M' = f(M)$ de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ telles que

$$x' = x+1 \quad \text{et} \quad y' = x+y+1.$$

Vérifier que $f = f_\alpha$ dans le cas $\alpha = -1$. Montrer que f est une bijection du plan affine. Y a+il des points invariants par f ? Quelle est la matrice de l'endomorphisme φ associé à f ?

3. a. Vérifier que, quel que soit le réel λ, les vecteurs $\left(\overrightarrow{\imath} + \lambda\overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\varphi\left(\overrightarrow{\imath} + \lambda\overrightarrow{\jmath}\right)$ forment une famille libre.

b. Soit Δ une droite affine du plan : donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit parallèle à son image $f(\Delta)$?

4. Chercher l'image $f(\Delta)$ de la droite Δ dans chacun des cas suivants :

a. Δ a pour équation $x = k$. Montrer que, si M appartient Δ, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à un vecteur constant $\overrightarrow{u_k}$ dont on donnera les coordonnées.

b. Δ a pour équation $y = k'$.

c. Δ a pour équation $y = tx$; calculer dans ce cas les coordonnées du point P d'intersection des droites Δ et $f(\Delta)$ en fonction de t. Quel est l'ensemble Π décrit par P lorsque t décrit $\mathbb{R}$?

Figure : représenter Π. Tracer les droites Δ et $f(\Delta)$ dans le cas des droites L ayant respectivement pour équation $x = -1,\ y = -1,\ y = -2x$.

5. Faire une nouvelle figure.

On appelle M_0 l'origine du repère et l'on pose

$$M_1 = f\left(M_0\right) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad M_n = f\left(M_{n-1}\right).$$

Soit $\left(x_n\,;\,y_n\right)$ les coordonnées de M_n. Calculer les coordonnées de M_1, M_2, M_3. Exprimer x_n et y_n en fonction de x_{n-1} et y_{n-1}.

En déduire x_n et y_n en fonction de n.

Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, M_n appartient à la courbe C d'équation $y = \dfrac{x(x+1)}{2}$. Reconnaître C et la dessiner.

6. a. Soit g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En utilisant une primitive G de g, établir l'égalité

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\lambda_1+1}^{\lambda_2+1} g(x-1)\,\mathrm{d}x.$$

λ_1 et λ_2 réels donnés.

b. Si une courbe Γ a pour équation $y = h(x)$, montrer que son image $f(\Gamma)$ a pour équation $y = h(x-1)+x$.

Quelle est l'image de la courbe C du 5. ?

c. Cas particulier : soit E_n la région du plan comprise entre la courbe C et le segment $[M_{n-1}M_n]$; hachurer sur la figure les régions E_1, E_2, E_3, E_4.

Déduire du a. et du b. ci-dessus que l'aire de E_n est indépendante de n. Quelle est sa valeur ?

Partie B

On considère l'application h_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h_0(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1;$$

Soit Γ sa représentation graphique. Montrer que son image $f(\Gamma)$ est la représentation de l'application h_1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h_1(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1 + x.$$

Étudier les applications h_0 et h_1 ; représenter sur la même figure Γ et $f(\Gamma)$, en dessinant soigneusement l'asymptote de chacune d'elles.
λ étant un réel, supérieur à 1, calculer en fonction de λ l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la partie du plan dont les frontières sont les droites $x = 1$ et $x = \lambda$, la courbe $f(\Gamma)$ et son asymptote.
Montrer que, lorsque λ tend vers $+\infty$, $\mathscr{A}(\lambda)$ a une limite à déterminer.