

## ♣ Baccalauréat C Poitiers septembre 1972 ♣

### EXERCICE 1

Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{Z}$ , des entiers relatifs l'équation

$$x^2 - 4y^2 = 36.$$

### EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points A, de coordonnées  $(0; \sqrt{3})$ , et B, de coordonnées  $(1; 0)$ .

On désigne par  $R_1$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{6}$  et par  $R_2$  la rotation de centre B, d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

Montrer que la composée  $R_2 \circ R_1$  de  $R_1$  puis de  $R_2$  est une rotation, dont on précisera l'angle et le centre,  $\omega$ .

Démontrer que l'image  $(A'B')$  du couple de points (AB) par la rotation  $R_2 \circ R_1$  est telle que la droite  $(A'B')$  soit la médiatrice du segment [AB].

### PROBLÈME

Dans le plan affine euclidien (P) rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on donne les points A et B de coordonnées respectives  $(a; 0)$  et  $(-a; 0)$ , où  $a$  désigne un nombre réel strictement positif. Au point M de coordonnées  $(x; y)$  on fait correspondre, quand cela est possible, le point  $M'$ , intersection de la perpendiculaire en A à (AM) et de la perpendiculaire en B à (BM).

1. Calculer, en fonction de  $x$  et de  $y$ , les coordonnées de  $M'$ .  
Quel est l'ensemble (D) des points M pour lesquels le point  $M'$  existe, et est unique.  
Quel est l'ensemble (F) des points M pour lesquels le point  $M'$  est en A ou en B?
2. On considère l'application  $f$ , de (D) dans (P),  $M(x; y) \mapsto M'(X; Y)$  définie par

$$\begin{cases} X &= -x \\ Y &= \frac{x^2 - a^2}{y} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un sous-ensemble (E) de (D) tel que la restriction,  $\varphi$ , de  $f$  à (E) soit involutive. [On rappelle que  $\varphi$  est définie  $\forall M \in E$  par  $\varphi(M) = f(M)$ .]

Existe-t-il des points invariants par  $\varphi$ ?

3. Quelle est l'image par  $f$  de l'intersection avec (D)
  - a. d'une droite  $(\Delta_1)$  parallèle à l'axe des abscisses  $(O, \vec{i})$ ?
  - b. d'une droite  $(\Delta_2)$  parallèle à l'axe des ordonnées  $(O, \vec{j})$ ?
  - c. d'une droite  $(\Delta_3)$  passant par A?

- d.** de la droite  $(\Delta_4)$  d'équation  $y = X?$ ; dans ce dernier cas, construire l'image (C) de  $(\Delta_4)$ ;
- e.** d'un cercle passant par A et B?;
- f.** de l'hyperbole  $(H)$  d'équation  $y = \frac{1}{x}$ ?
- 4.** On suppose maintenant que  $a = \sqrt{2}$ . Construire l'image  $(H')$  de  $(H) \cap (D)$  par  $f$ . Étudier l'intersection de  $(H)$  et de  $(H')$ ,  $(H')$  étant définie par

$$\begin{cases} y = g(x), \\ x = 0. \end{cases}$$

Calculer, à  $10^{-3}$  près, l'aire du domaine plan défini par

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \sqrt{2}, \\ g(x) \leq y \leq \frac{1}{x}. \end{cases}$$